電験二種　オンライン講座

機械制御　自動制御

2025.9.14 Sun

ラプラス変換

【イーデン】 e-DEN × 電験どうでしょう Let me inject Energy to you!

関数$f(t)$は、$t>0$で定義され、
実数または複素数の値をとる関数とする。
sを複素数として、以下の積分

$$F(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t$$

が存在するとき、これを$f(t)$のラプラス変換といい、

$$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$$

と書く。また、$f(t)$は原関数、$F(s)$は像関数という。

例　$f(t)=1$のラプラス変換

$$F(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\cdot 1\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right]_0^\infty=\frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^0-\frac{1}{\mathrm{e}^\infty}\right)=\frac{1}{s}$$

例　$f(t)=t$ のラプラス変換

$$F(s)=\int_0^\infty \underbrace{\mathrm{e}^{-st}}_{f(x)'}\cdot \underbrace{t}_{g(x)}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{s}t\mathrm{e}^{-st}\right]_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$f(x)'=\mathrm{e}^{-st}\ \rightarrow f(x)=\int \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}x=-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}$$

$$=\left[-\frac{1}{s}t\mathrm{e}^{-st}\right]_0^\infty+\frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right]_0^\infty=0+\frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right]_0^\infty$$

$$\lim_{t\to\infty} t\mathrm{e}^{-st}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^{st}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{s\mathrm{e}^{st}}=\frac{1}{\infty}=0$$

（ロピタルの定理）

$$=\frac{1}{s^2}\left(\mathrm{e}^0-\frac{1}{\mathrm{e}^\infty}\right)=\frac{1}{s^2}$$

ラプラス変換の対応表

原関数$f(t)$	像関数$F(s)$
$\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)$	$\alpha \cdot F(s) + \beta \cdot F(s)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
$\mathrm{e}^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-\mu)$	$\mathrm{e}^{-\mu s}F(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f''(0) \cdots - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$

原関数$f(t)$	像関数$F(s)$
$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
te^t	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

逆ラプラス変換

これまで学習してきたラプラス変換の逆変換を逆ラプラス変換$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$と書く。

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=f(t)$$

逆ラプラス変換を具体的に求める場合、ラプラス変換の対応表を使い、像関数$F(s)$から原関数$f(t)$への変換を行えばよい。

ラプラス変換
$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$

$$f(t) \rightleftarrows F(s)$$

逆ラプラス変換
$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=f(t)$

ラプラス変換

原関数$f(t)$	像関数$F(s)$
$\delta(t)$	1
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$t\mathrm{e}^{t}$	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

逆ラプラス変換

R06 問4

問４　伝達関数 $G_1(s)$，$G_2(s)$ に対して図１のように直列結合した制御系と図２のように並列結合した制御系が与えられている。$U(s)$ は入力量，$Y_1(s)$ は直列結合した場合の出力量，$Y_2(s)$ は並列結合した場合の出力量をあらわしている。$U(s)$，$Y_1(s)$，$Y_2(s)$ は時間信号 $u(t)$，$y_1(t)$，$y_2(t)$ をそれぞれラプラス変換したものである。

伝達関数 $G_1(s)$，$G_2(s)$ が，

$$G_1(s)=\frac{3}{s+2},\quad G_2(s)=\frac{5}{s^2+5s+6}$$

のように与えられているとき，以下の問に答えよ。

(1) 図１の直列結合された制御系の $U(s)$ から $Y_1(s)$ の伝達関数を求めよ。なお，伝達関数は，一つの有理関数で表すとし，分母及び分子は s の多項式で示すこと。

(2) (1) で求めた直列結合された伝達関数に単位ステップ信号を加えたときの出力量 $Y_1(s)$ の定常値を求めよ。

(3) 図 2 の並列結合された制御系のインパルス信号を加えたときの $Y_2(s)$ の時間応答を求めよ。

(4) (3) で求めた並列結合された伝達関数に $u(t)=2e^{-t}$ を加えたときの $Y_2(s)$ の時間応答を求めよ。

(5) (3) で求めた並列結合された伝達関数の周波数応答において，周波数を十分に大きくしたときの位相を求めよ。

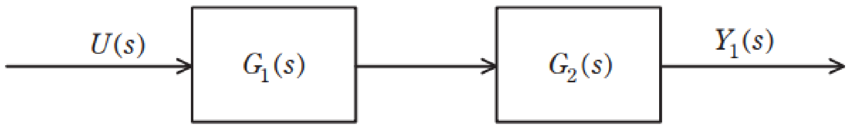


図1 直列結合された制御系

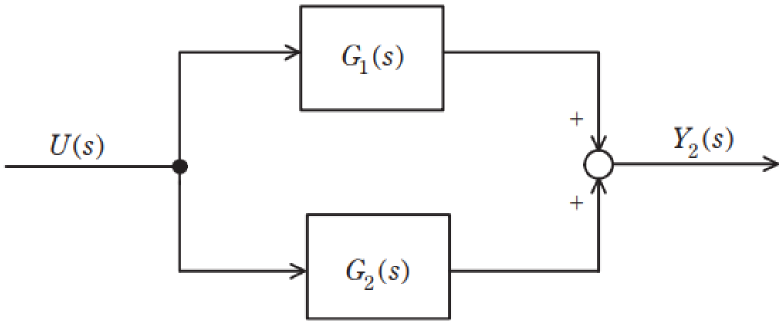


図2 並列結合された制御系

R06 問4

問４　伝達関数 $G_1(s)$，$G_2(s)$ に対して図１のように直列結合した制御系と図２のように並列結合した制御系が与えられている。$U(s)$ は入力量，$Y_1(s)$ は直列結合した場合の出力量，$Y_2(s)$ は並列結合した場合の出力量をあらわしている。$U(s)$，$Y_1(s)$，$Y_2(s)$ は時間信号 $u(t)$，$y_1(t)$，$y_2(t)$ をそれぞれラプラス変換したものである。

伝達関数 $G_1(s)$，$G_2(s)$ が，

$$G_1(s)=\frac{3}{s+2},\quad G_2(s)=\frac{5}{s^2+5s+6}$$

のように与えられているとき，以下の問に答えよ。

(1) 図１の直列結合された制御系の $U(s)$ から $Y_1(s)$ の伝達関数を求めよ。なお，伝達関数は，一つの有理関数で表すとし，分母及び分子は s の多項式で示すこと。

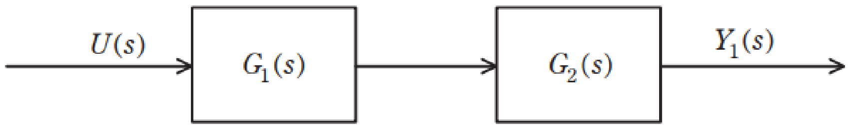


図1 直列結合された制御系

(2) (1) で求めた直列結合された伝達関数に単位ステップ信号を加えたときの出力量 $Y_1(s)$ の定常値を求めよ。

R06 問4

問4　伝達関数$G_1(s)$，$G_2(s)$に対して図1のように直列結合した制御系と図2のように並列結合した制御系が与えられている。$U(s)$は入力量，$Y_1(s)$は直列結合した場合の出力量，$Y_2(s)$は並列結合した場合の出力量をあらわしている。$U(s)$，$Y_1(s)$，$Y_2(s)$は時間信号$u(t)$，$y_1(t)$，$y_2(t)$をそれぞれラプラス変換したものである。

伝達関数　$G_1(s)$，$G_2(s)$　が，

$$G_1(s)=\frac{3}{s+2},\quad G_2(s)=\frac{5}{s^2+5s+6}$$

のように与えられているとき，以下の問に答えよ。

(1)　図1の直列結合された制御系の$U(s)$から$Y_1(s)$の伝達関数を求めよ。なお，伝達関数は，一つの有理関数で表すとし，分母及び分子はsの多項式で示すこと。

$$Y_1(s)=G_1(s)G_2(s)U(s)$$

$$\frac{Y_1(s)}{U(s)}=G_1(s)G_2(s)=\frac{3}{s+2}\cdot\frac{5}{s^2+5s+6}$$
$$=\frac{15}{s^3+5s^2+6s+2s^2+10s+12}=\frac{15}{s^3+7s^2+16s+12}$$

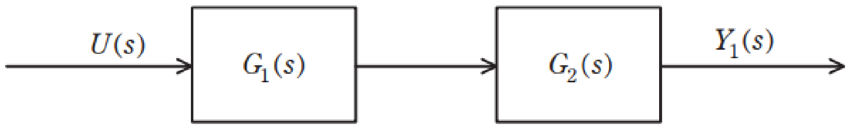


図1　直列結合された制御系

(2)　(1)で求めた直列結合された伝達関数に単位ステップ信号を加えたときの出力量$Y_1(s)$の定常値を求めよ。

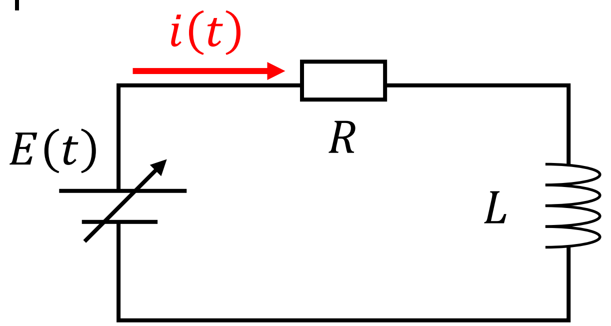
$$Y_1(s)=G_1(s)G_2(s)U(s)=\frac{15}{s^3+7s^2+16s+12}\cdot\frac{1}{s}$$

最終値の定理

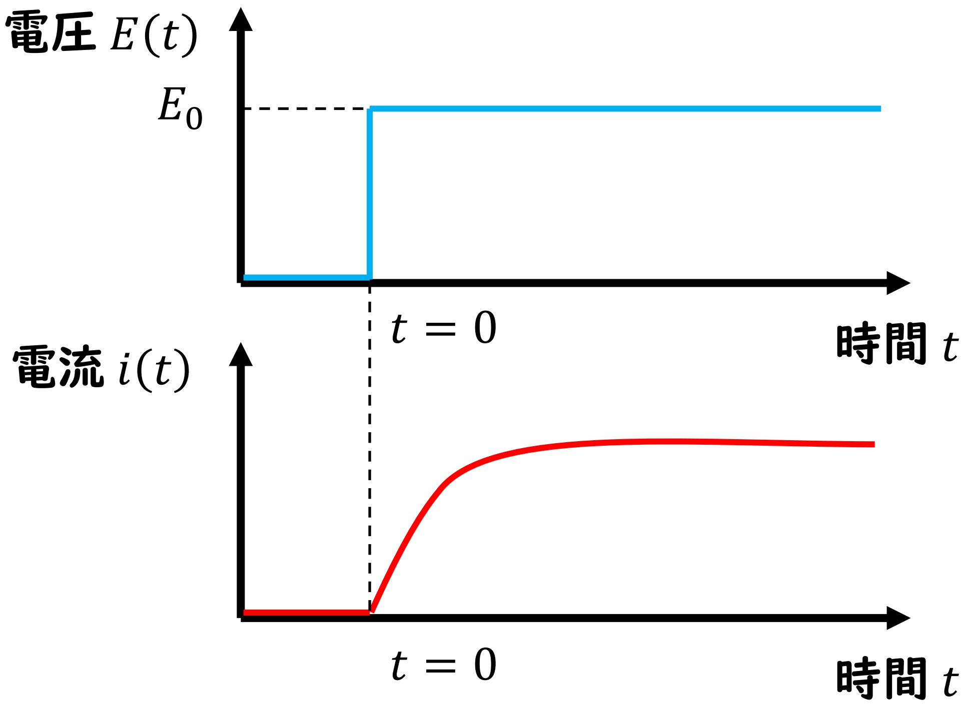
$$f(\infty)\ \rightarrow \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$$y_1(\infty)=\lim_{s\to 0} s\frac{15}{s^3+7s^2+16s+12}\cdot\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{15}{s^3+7s^2+16s+12}$$
$$=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$$

過渡応答（ステップ応答）



$E(t)$は$E_0u(t)$と表し、
$u(t)$は、
$1\ (t \geq 0)$
$0\ (t < 0)$
→こういう関数を
『ステップ関数$u(t)$』と呼ぶ



$$E(t) = E_0u(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}i(t)$$

$$\xrightarrow[\mathcal{L}]{} E_0U(s) = RI(s) + sLI(s)$$

$$I(s) = \frac{E_0}{R+sL}U(s) = \frac{E_0}{R+sL}\frac{1}{s}$$

ステップ関数のラプラス変換

$$u(t) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} U(s) = \frac{1}{s}$$

$$I(s) = \frac{E_0}{R+sL}\frac{1}{s} = \frac{E_0}{L}\frac{1}{s(s+R/L)} = \frac{E_0}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+R/L}\right) \xrightarrow{\text{最終値の定理}} i(\infty) = \lim_{s\to 0} s\,I(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{E_0}{L}\frac{1}{s(s+R/L)} = \frac{E_0}{R}$$

$$\xrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{} I(t) = \frac{E_0}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-tR/L}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} i(\infty) = \frac{E_0}{R}$$

過渡応答　　定常状態

最終値の定理

$$f(\infty) \to \lim_{s\to 0} sF(s)$$

R06 問4

$U(s)$，$Y_1(s)$，$Y_2(s)$ は時間信号 $u(t)$，$y_1(t)$，$y_2(t)$ をそれぞれラプラス変換したものである。

伝達関数 $G_1(s)$，$G_2(s)$ が，

$$G_1(s)=\frac{3}{s+2},\quad G_2(s)=\frac{5}{s^2+5s+6}$$

のように与えられているとき，以下の問に答えよ。

(3) 図 2 の並列結合された制御系のインパルス信号を加えたときの $Y_2(s)$ の時間応答を求めよ。

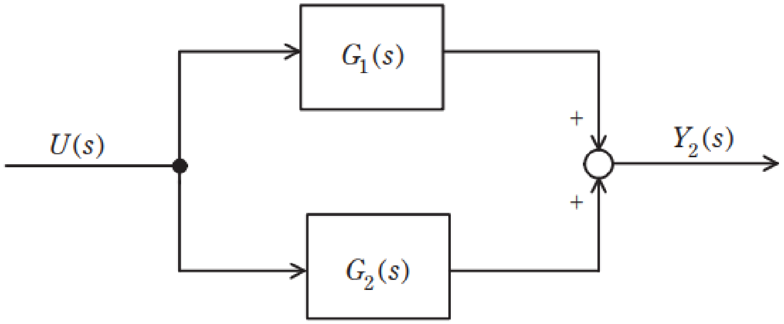


図2 並列結合された制御系

R06 問4

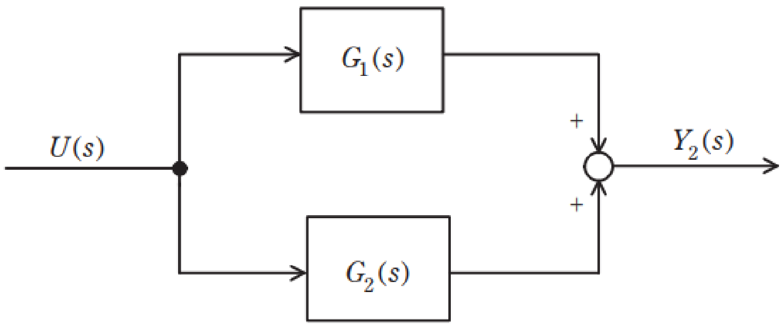


図2 並列結合された制御系

$U(s)$，$Y_1(s)$，$Y_2(s)$ は時間信号 $u(t)$，$y_1(t)$，$y_2(t)$ をそれぞれラプラス変換したものである。

伝達関数 $G_1(s)$，$G_2(s)$ が，

$$G_1(s)=\frac{3}{s+2},\quad G_2(s)=\frac{5}{s^2+5s+6}$$

のように与えられているとき，以下の問に答えよ。

(3) 図 2 の並列結合された制御系のインパルス信号を加えたときの $Y_2(s)$ の時間応答を求めよ。

$$Y_2(s)=\{G_1(s)+G_2(s)\}U(s)$$

$$\frac{Y_2(s)}{U(s)}=G_1(s)+G_2(s)=\frac{3}{s+2}+\frac{5}{s^2+5s+6}$$

$$=\frac{3}{s+2}+\frac{5}{(s+2)(s+3)}=\frac{3(s+3)+5}{(s+2)(s+3)}=\underbrace{\frac{3s+14}{(s+2)(s+3)}}_{F(s)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}$$

ヘビサイドの展開定理より

$$A=\lim_{s\to-2}(s+2)F(s)=\lim_{s\to-2}\frac{3s+14}{s+3}=\frac{8}{1}\to A=8$$

$$B=\lim_{s\to-3}(s+3)F(s)=\lim_{s\to-3}\frac{3s+14}{s+2}=\frac{5}{-1}\to B=-5$$

$$\frac{Y_2(s)}{U(s)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}=\frac{8}{s+2}-\frac{5}{s+3}$$

$$Y_2(s)=\{G_1(s)+G_2(s)\}U(s)=\left\{\frac{8}{s+2}-\frac{5}{s+3}\right\}\cdot 1$$

$$Y_2(s)=\frac{8}{s+2}-\frac{5}{s+3}$$

$$\xrightarrow[\text{変換}]{\text{逆ラプラス}}\quad y_2(t)=8\mathrm{e}^{-2t}-5\mathrm{e}^{-3t}$$

ヘビサイドの展開定理(その1)

以下の分数式$f(x)$を部分分数分解することを考える

$$f(x)=\frac{P(x)}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(s+a_n)}=\frac{A_1}{x+a_1}+\frac{A_2}{x+a_2}+\cdots+\frac{A_n}{x+a_n}$$

このとき、部分分数分解された各項の係数$A_1, A_2\cdots A_n$は以下のように導出できる

$$\lim_{x\to -a_1}(x+a_1)f(x)=\lim_{x\to -a_1}\frac{P(x)}{(x+a_2)(x+a_3)\cdots(s+a_n)}=A_1$$

$$\lim_{x\to -a_2}(x+a_2)f(x)=\lim_{x\to -a_2}\frac{P(x)}{(x+a_1)(x+a_3)\cdots(s+a_n)}=A_2$$

$$\vdots$$

$$\lim_{x\to -a_n}(x+a_n)f(x)=\lim_{x\to -a_n}\frac{P(x)}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(s+a_{n-1})}=A_n$$

ヘビサイドの展開定理（その2）

以下の分数式$f(x)$を部分分数分解することを考える

$$f(x)=\frac{P(x)}{(x+a_1)^2(x+a_3)\cdots(x+a_n)}=\frac{A_1}{(x+a_1)^2}+\frac{A_2}{x+a_1}+\frac{A_3}{x+a_3}+\cdots+\frac{A_n}{x+a_n}$$

このとき、部分分数分解された各項の係数$A_1,A_2\cdots A_n$は以下のように導出できる

$$\lim_{x\to -a_1}(x+a_1)^2 f(x)=\lim_{x\to -a_1}\frac{P(x)}{(x+a_3)\cdots(x+a_n)}=A_1$$

$$\lim_{x\to -a_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+a_1)^2 f(x)=\lim_{x\to -a_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{P(x)}{(x+a_3)\cdots(x+a_n)}=A_2$$

$$\lim_{x\to -a_3}(x+a_3)f(x)=\lim_{x\to -a_3}\frac{P(x)}{(x+a_1)^2(x+a_3)\cdots(x+a_n)}=A_3$$

$$\vdots$$

$$\lim_{x\to -a_n}(x+a_n)f(x)=\lim_{x\to -a_n}\frac{P(x)}{(x+a_1)^2(x+a_3)\cdots(x+a_{n-1})}=A_n$$

R06 問4

(4) (3) で求めた並列結合された伝達関数に $u(t)=2\mathrm{e}^{-t}$ を加えたときの $Y_2(s)$ の時間応答を求めよ。

$$Y_2(s)=\{G_1(s)+G_2(s)\}U(s)$$

$$\frac{Y_2(s)}{U(s)}=G_1(s)+G_2(s)=\frac{3}{s+2}+\frac{5}{s^2+5s+6}$$
$$=\frac{3}{s+2}+\frac{5}{(s+2)(s+3)}=\frac{3(s+3)+5}{(s+2)(s+3)}=\frac{3s+14}{(s+2)(s+3)}$$

(5) (3) で求めた並列結合された伝達関数の周波数応答において，周波数を十分に大きくしたときの位相を求めよ。

R06 問4

e-DEN【イーデン】 × 電験どうでしょう

(4) (3) で求めた並列結合された伝達関数に $u(t)=2e^{-t}$ を加えたときの $Y_2(s)$ の時間応答を求めよ。

$$u(t)=2e^{-t} \xrightarrow[\text{変換}]{\text{ラプラス}} U(s)=\frac{2}{s+1}$$

$$Y_2(s)=\{G_1(s)+G_2(s)\}U(s)=\frac{3s+14}{(s+2)(s+3)}\cdot\frac{2}{s+1}$$

$$=2\underbrace{\frac{3s+14}{(s+1)(s+2)(s+3)}}_{F(s)}=2\left\{\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+3}\right\}$$

ヘビサイドの展開定理より

$$A=\lim_{s\to-1}(s+1)F(s)=\lim_{s\to-1}\frac{3s+14}{(s+2)(s+3)}=\frac{11}{1\cdot 2}\to A=\frac{11}{2}$$

$$B=\lim_{s\to-2}(s+2)F(s)=\lim_{s\to-2}\frac{3s+14}{(s+1)(s+3)}=\frac{8}{-1\cdot 1}\to B=-8$$

$$C=\lim_{s\to-3}(s+3)F(s)=\lim_{s\to-3}\frac{3s+14}{(s+1)(s+2)}=\frac{5}{-2\cdot(-1)}\to C=\frac{5}{2}$$

$$Y_2(s)=2\left\{\frac{\frac{11}{2}}{s+1}+\frac{-8}{s+2}+\frac{\frac{5}{2}}{s+3}\right\}=\frac{11}{s+1}-\frac{16}{s+2}+\frac{5}{s+3}$$

$$\xrightarrow[\text{変換}]{\text{逆ラプラス}} y_2(t)=11e^{-t}-16e^{-2t}+5e^{-3t}$$

(5) (3) で求めた並列結合された伝達関数の周波数応答において，周波数を十分に大きくしたときの位相を求めよ。

$$G_1(j\omega)+G_2(j\omega)=\frac{3j\omega+14}{(j\omega+2)(j\omega+3)}=\frac{j3\omega+14}{-\omega^2+j5\omega+6}=\frac{j3+\frac{14}{\omega}}{-\omega+j5+\frac{6}{\omega}}$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{j3+\frac{14}{\omega}}{-\omega+j5+\frac{6}{\omega}}=\frac{j3}{-\infty+j5}=\frac{1}{j}\frac{3}{\infty}\to-90^\circ$$

R05 問4

問4　本問題で扱う伝達関数の全ての極と零点は複素平面上の右半平面には存在しないものと仮定する。以下の問に答えよ。ここで必要に応じて，$14 = 20\log_{10} 10^{0.7}$，$10^{0.7} = 5.0119$ を用いよ。ただし，全ての図は折れ線近似で表している。

(1) 図1に示すゲイン特性曲線から積分要素の伝達関数 $G_1(s) = \dfrac{1}{T_1 s}$ を求めよ。

(2) 図2に示すゲイン特性曲線が表す伝達関数 $G(s)$ を $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ のように分解して考える。$G_1(s)$ を小問(1)で求めた伝達関数とするときの $G_2(s)$ を求めよ。

(3) 図2に示すゲイン特性曲線から伝達関数 $G(s)$ を求めよ。ただし，$G(s) = \dfrac{1}{T_{I1} s}$ とおいて，その周波数伝達関数 $G(j\omega) = \dfrac{1}{jT_{I1}\omega}$ のゲインが $\omega = 0.1\,\text{rad/s}$ のとき 40 dB であることを用いて T_{I1} を決定せよ。

(4) 折れ線近似で表した図3に示すゲイン特性曲線から伝達関数 $G(s)$ を求めよ。ただし，$G(s)$ を積分要素 $G_1(s) = \dfrac{1}{T_{I2} s}$ と一次遅れ要素 $G_2(s) = \dfrac{1}{1 + Ts}$ に分解して考えよ。

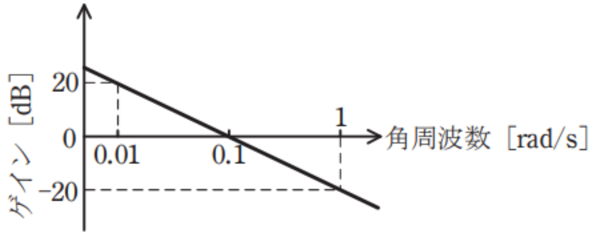


図1

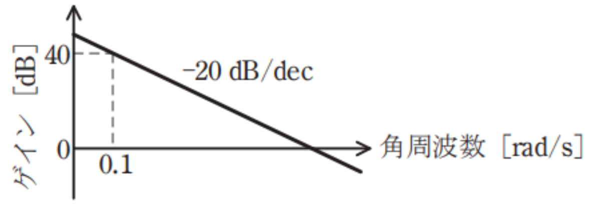


図2

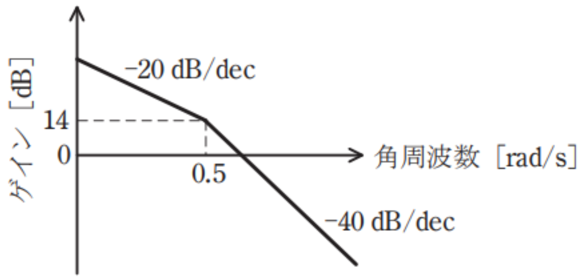


図3

R05 問4

問４　本問題で扱う伝達関数の全ての極と零点は複素平面上の右半平面には存在しないものと仮定する。以下の問に答えよ。ここで必要に応じて，$14 = 20\log_{10} 10^{0.7}$，$10^{0.7} = 5.0119$ を用いよ。ただし，全ての図は折れ線近似で表している。

(1)　図１に示すゲイン特性曲線から積分要素の伝達関数 $G_1(s) = \dfrac{1}{T_1 s}$ を求めよ。

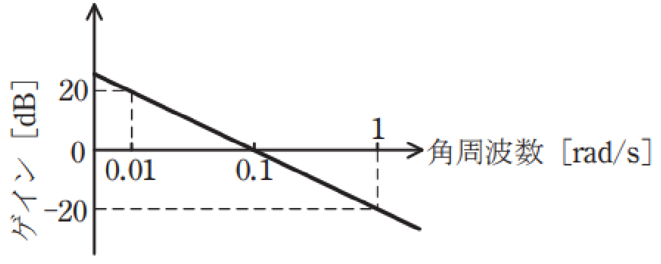


図１

(2)　図２に示すゲイン特性曲線が表す伝達関数 $G(s)$ を $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ のように分解して考える。$G_1(s)$ を小問(1)で求めた伝達関数とするときの $G_2(s)$ を求めよ。

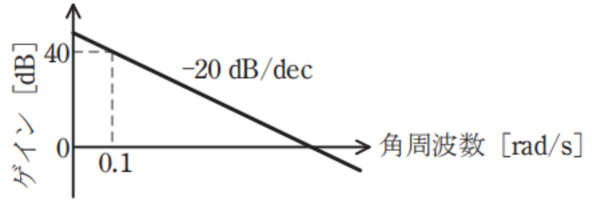


図２

R05 問4

問４　本問題で扱う伝達関数の全ての極と零点は複素平面上の右半平面には存在しないものと仮定する。以下の問に答えよ。ここで必要に応じて，$14 = 20\log_{10} 10^{0.7}$，$10^{0.7} = 5.0119$ を用いよ。ただし，全ての図は折れ線近似で表している。

(1)　図１に示すゲイン特性曲線から積分要素の伝達関数 $G_1(s) = \dfrac{1}{T_1 s}$ を求めよ。

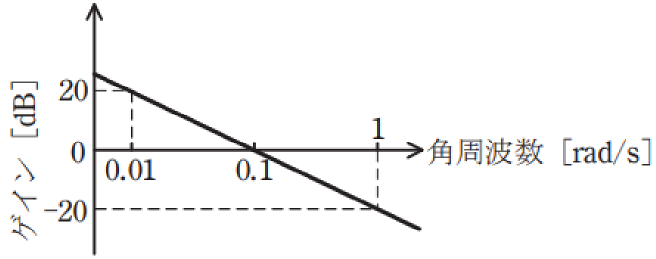


図１

$$20\log_{10}|G_1(j\omega)| = 20\log_{10}\left|\frac{1}{T_1 j\omega}\right| = 20\log_{10}\left|\frac{1}{T_1\omega}\right| = 20\left\{\log_{10}\frac{1}{T_1} - \log_{10}\omega\right\}$$

$$20 = 20\left\{\log_{10}\frac{1}{T_1} - \log_{10}0.01\right\} \rightarrow 1 = \log_{10}\frac{1}{T_1} + 2 \rightarrow \log_{10}\frac{1}{T_1} = -1$$

$$\log_{10}T_1 = 1 \rightarrow T_1 = 10^1 = 10$$

$$G_1(s) = \frac{1}{T_1 s} = \frac{1}{10s}$$

(2)　図２に示すゲイン特性曲線が表す伝達関数 $G(s)$ を $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ のように分解して考える。$G_1(s)$ を小問(1)で求めた伝達関数とするときの $G_2(s)$ を求めよ。

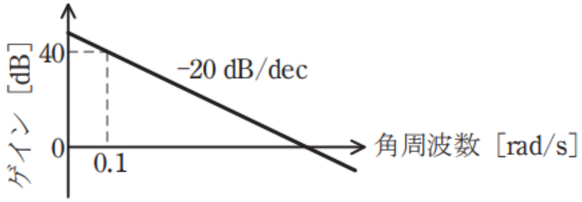


図２

$$20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}|G_1(j\omega)G_2(j\omega)|$$
$$= 20\left\{\log_{10}\frac{1}{T_1} - \log_{10}\omega + \log_{10}G_2(j\omega)\right\}$$

$$40 = 20\left\{\log_{10}\frac{1}{10} - \log_{10}0.1 + \log_{10}G_2(j\omega)\right\}$$

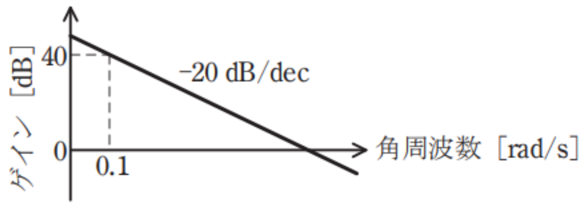
$$2 = -1 - (-1) + \log_{10}G_2(j\omega) \rightarrow \log_{10}G_2(j\omega) = 2$$

$$\rightarrow G_2(j\omega) = 10^2 = 100$$

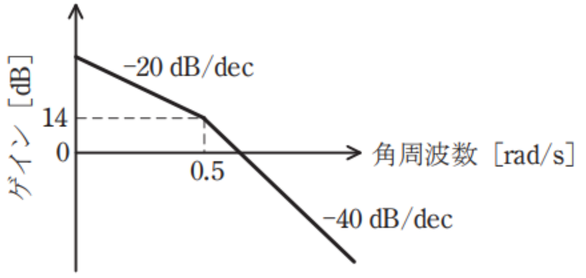
R05 問4

問4　本問題で扱う伝達関数の全ての極と零点は複素平面上の右半平面には存在しないものと仮定する。以下の問に答えよ。ここで必要に応じて，$14 = 20\log_{10} 10^{0.7}$，$10^{0.7} = 5.0119$ を用いよ。ただし，全ての図は折れ線近似で表している。

(3) 図 2 に示すゲイン特性曲線から伝達関数 $G(s)$ を求めよ。ただし，$G(s) = \dfrac{1}{T_{I1}s}$ とおいて，その周波数伝達関数 $G(j\omega) = \dfrac{1}{jT_{I1}\omega}$ のゲインが $\omega = 0.1\,\mathrm{rad/s}$ のとき 40 dB であることを用いて T_{I1} を決定せよ。



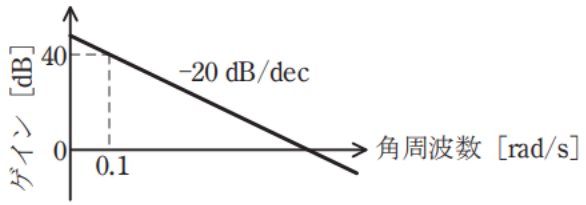
(4) 折れ線近似で表した図 3 に示すゲイン特性曲線から伝達関数 $G(s)$ を求めよ。ただし，$G(s)$ を積分要素 $G_1(s) = \dfrac{1}{T_{I2}s}$ と一次遅れ要素 $G_2(s) = \dfrac{1}{1+Ts}$ に分解して考えよ。



R05 問4

問４　本問題で扱う伝達関数の全ての極と零点は複素平面上の右半平面には存在しないものと仮定する。以下の問に答えよ。ここで必要に応じて，$14 = 20\log_{10} 10^{0.7}$，$10^{0.7} = 5.0119$ を用いよ。ただし，全ての図は折れ線近似で表している。

(3) 図２に示すゲイン特性曲線から伝達関数 $G(s)$ を求めよ。ただし，$G(s) = \dfrac{1}{T_{11}s}$ とおいて，その周波数伝達関数 $G(j\omega) = \dfrac{1}{jT_{11}\omega}$ のゲインが $\omega = 0.1\,\mathrm{rad/s}$ のとき $40\,\mathrm{dB}$ であることを用いて T_{11} を決定せよ。

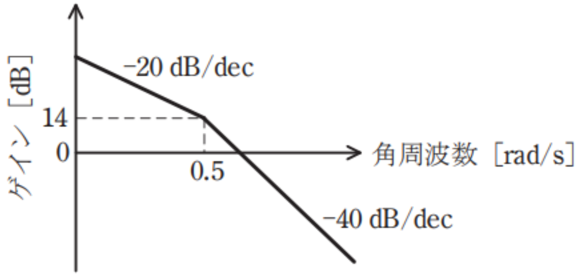


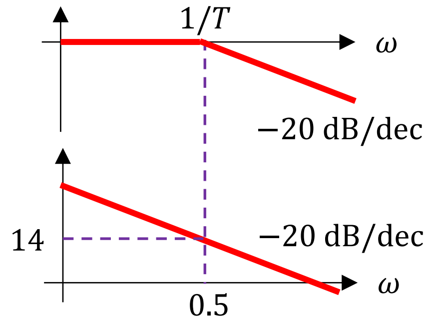
$$20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}\left|\frac{1}{T_{11}j\omega}\right| = 20\left\{\log_{10}\frac{1}{T_{11}} - \log_{10}\omega\right\}$$

$$40 = 20\left\{\log_{10}\frac{1}{T_{11}} - \log_{10} 0.1\right\} \rightarrow 2 = \log_{10}\frac{1}{T_{11}} + 1 \rightarrow \log_{10}\frac{1}{T_{11}} = 1$$

$$\log_{10} T_{11} = -1 \rightarrow T_{11} = 10^{-1} = \frac{1}{10} \qquad G_1(s) = \frac{1}{T_{11}s} = \frac{10}{s}$$

(4) 折れ線近似で表した図３に示すゲイン特性曲線から伝達関数 $G(s)$ を求めよ。ただし，$G(s)$ を積分要素 $G_1(s) = \dfrac{1}{T_{12}s}$ と一次遅れ要素 $G_2(s) = \dfrac{1}{1+Ts}$ に分解して考えよ。





$$20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}\left|\frac{1}{T_{12}j\omega}\cdot\frac{1}{1+Tj\omega}\right|$$

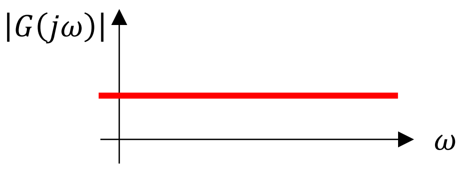
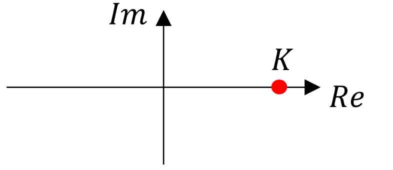
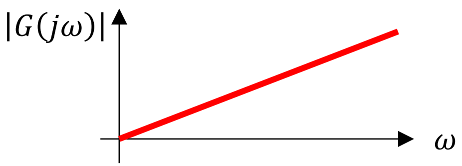
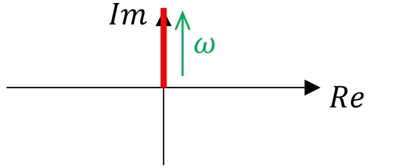
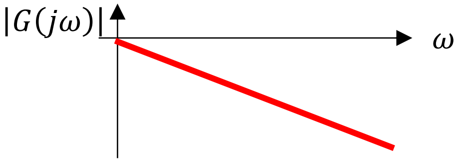
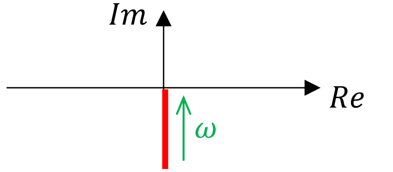
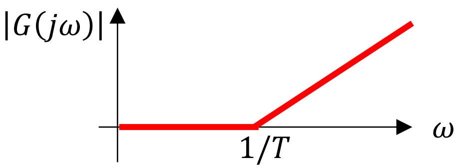
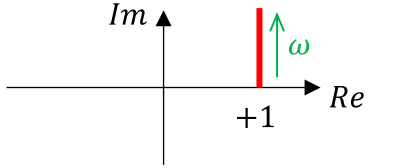
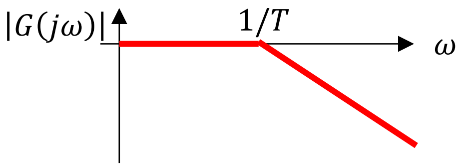
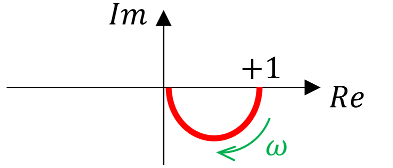
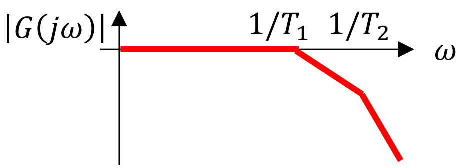
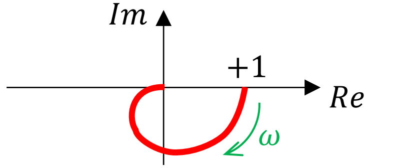
$$= 20\left\{\log_{10}\frac{1}{T_{12}} - \log_{10}\omega + \log_{10}\frac{1}{1+Tj\omega}\right\} \sim 20\left\{\log_{10}\frac{1}{T_{12}} - \log_{10}\omega\right\}$$

折れ線近似 $\dfrac{1}{T} = 0.5\ (T = 2) \rightarrow \log_{10}\dfrac{1}{1+Tj\omega} = 0$

$$14 = 20\left\{\log_{10}\frac{1}{T_{12}} - \log_{10} 0.5\right\} \rightarrow 0.7 = \log_{10}\frac{1}{T_{12}} - \log_{10}\frac{1}{2} = \log_{10}\frac{2}{T_{12}}$$

$$\frac{2}{T_{12}} = 10^{0.7} = 5.0119 \rightarrow T_{12} = 0.39905 \qquad G(s) = \frac{1}{0.39905s}\frac{1}{1+2s}$$

ボード線図とナイキスト線図 まとめ

制御要素	伝達関数	絶対値（対数）	位相	ボード線図	ナイキスト線図
比例要素	K	$20\log_{10}K$	0		
微分要素	$j\omega$	$20\log_{10}\omega$	$\dfrac{\pi}{2}$		
積分要素	$\dfrac{1}{j\omega}$	$-20\log_{10}\omega$	$-\dfrac{\pi}{2}$		
1次進み要素	$1+j\omega T$	$20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2T^2}$	$\theta=\mathrm{Tan}^{-1}\omega T$		
1次遅れ要素	$\dfrac{1}{1+j\omega T}$	$-20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2T^2}$	$\theta=-\mathrm{Tan}^{-1}\omega T$		
2次遅れ要素	$\dfrac{1}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}$	$-20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2{T_1}^2}$ $-20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2{T_2}^2}$	$\theta_1=-\mathrm{Tan}^{-1}\omega T_1$ $\theta_2=-\mathrm{Tan}^{-1}\omega T_2$ $\theta_1+\theta_2$		

ご聴講ありがとう
ございました!!