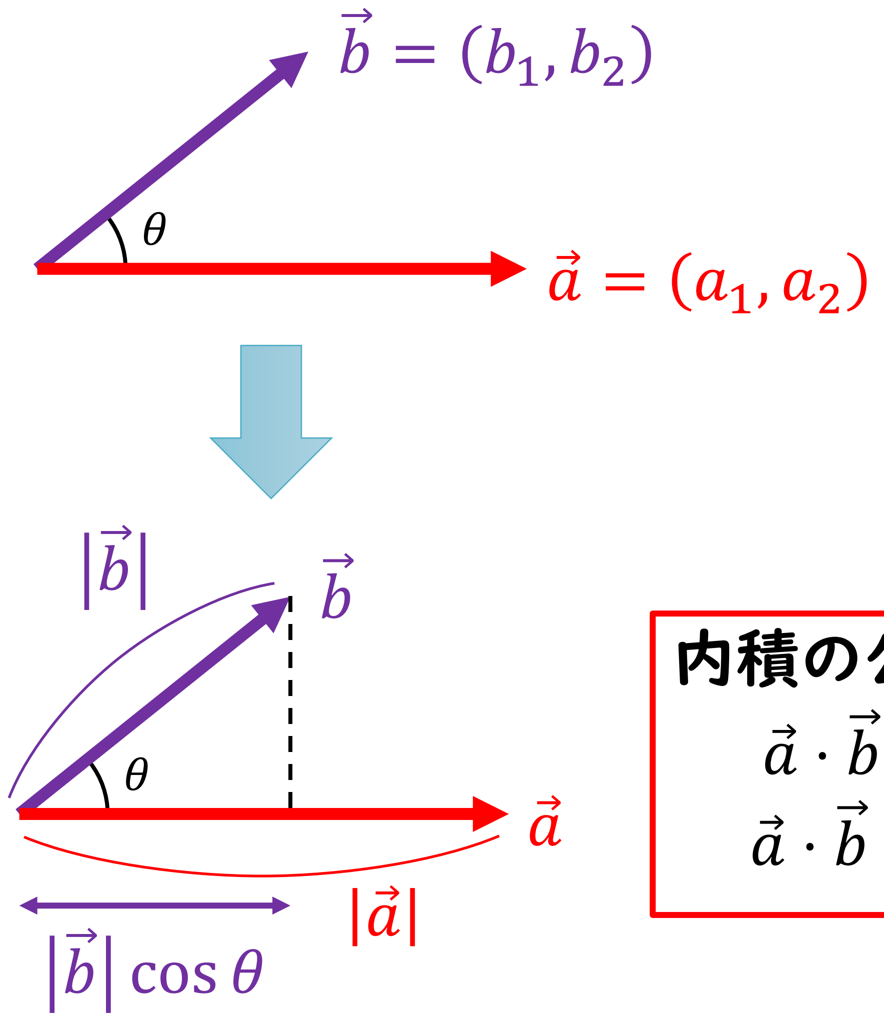
電験三種　オンライン講座

電気数学　第21回
ベクトル
（内積、外積）

2024.09.29 Sun

内積



内積はベクトル$\vec{b}$の真上から光をあてて、
ベクトル$\vec{a}$上に見える影のようなものを考えるイメージ

内積の公式

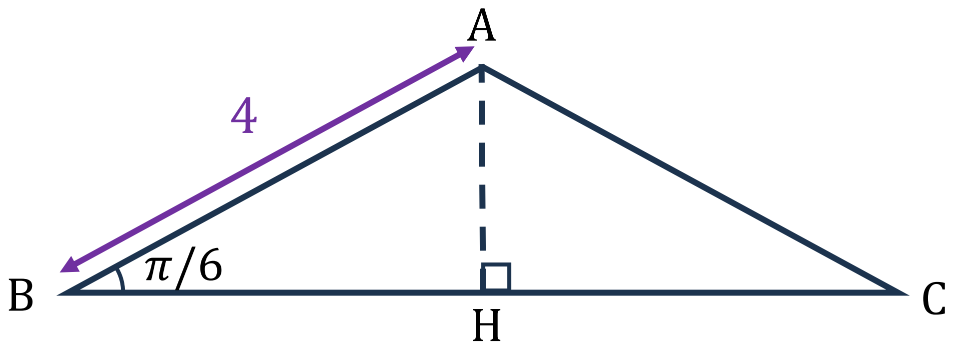
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

2つのベクトルが平行のとき内積は最大
2つのベクトルが直交のとき内積は0

演習Ⅰ

図の$AB = AC$**である二等辺三角形**ABC**に対して、次の内積を求めよ。**

(1)　$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$　　(2)　$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$



(3)　$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$　　(4)　$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$

内積の公式

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

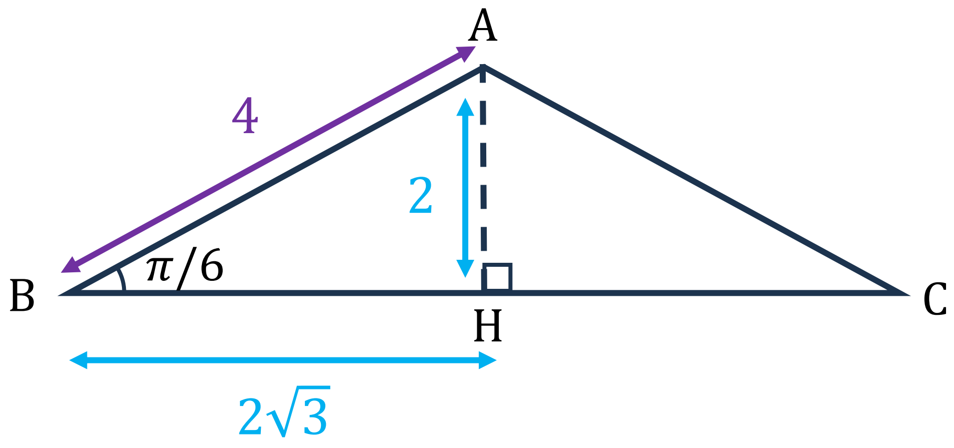
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$\vec{a}$**、**$\vec{b}$**の成分が次のように与えられるとき、内積**$\vec{a} \cdot \vec{b}$**を求めよ。**

(5)　$\vec{a} = (1, -3), \vec{b} = (2,3)$　　(6)　$\vec{a} = (3, -1), \vec{b} = (1,3)$　　(7)　$\vec{a} = (2,5), \vec{b} = (-2,3)$

演習１（解答）

図の$AB = AC$である二等辺三角形ABCに対して、次の内積を求めよ。



（1） $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$4 \cdot 4 \cdot \cos 120°$$
$$= 16 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -8$$

（2） $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

$$4 \cdot 2 \cdot \cos 60°$$
$$= 8 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

（3） $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$

$$4 \cdot 4 \cdot \cos 60°$$
$$= 16 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 8$$

（4） $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$

$$4\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \cos 150°$$
$$= 16\sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -24$$

$\vec{a}$、$\vec{b}$の成分が次のように与えられるとき、内積$\vec{a} \cdot \vec{b}$を求めよ。

（5） $\vec{a} = (1, -3), \vec{b} = (2,3)$

$$1 \times 2 + (-3) \times 3 = 2 - 9$$
$$= -7$$

（6） $\vec{a} = (3, -1), \vec{b} = (1,3)$

$$3 \times 1 + (-1) \times 3 = 3 - 3$$
$$= 0$$

（7） $\vec{a} = (2,5), \vec{b} = (-2,3)$

$$2 \times (-2) + 5 \times 3 = -4 + 15$$
$$= 11$$

演習2

次の２つのベクトル$\vec{a}$,$\vec{b}$の内積とベクトル間のなす角θを求めよ。

(1)　$\vec{a} = (2\,, 2\sqrt{2}, 6)$,$\vec{b} = (3\,, 3\sqrt{2}, 3)$

(2)　$\vec{a} = (-2\,, -1, -3)$,$\vec{b} = (6\,, -4, 2)$

(3)　$\vec{a} = (-3\,, 0, 3)$,$\vec{b} = (2\,, 4\,, -4)$

$$\vec{a} = (a_1\,, a_2, a_3)$$
$$\vec{b} = (b_1\,, b_2, b_3)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

演習2（解答）

(1) $\vec{a} = \left(2\,, 2\sqrt{2}, 6\right)\ , \vec{b} = \left(3\,, 3\sqrt{2}, 3\right)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\times3 + 2\sqrt{2}\times3\sqrt{2} + 6\times3 = 6 + 12 + 18 = 36$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 6^2} = \sqrt{4+8+36} = 4\sqrt{3}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{9+18+9} = 6$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{36}{4\sqrt{3}\times6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = 30°$$

(2) $\vec{a} = (-2\,, -1, -3)\ , \vec{b} = (6\,, -4, 2)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (-2)\times6 + (-1)\times(-4) + (-3)\times2$$
$$= -12 + 4 - 6 = -14$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{36+16+4} = 2\sqrt{14}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-14}{\sqrt{14}\times2\sqrt{14}} = -\frac{1}{2} \rightarrow \theta = 120°$$

(3) $\vec{a} = (-3\,, 0, 3)\ , \vec{b} = (2\,, 4\,, -4)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (-3)\times2 + 0\times4 + 3\times(-4)$$
$$= -6 + 0 - 12 = -18$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{9+0+9} = 3\sqrt{2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-18}{3\sqrt{2}\times6} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \theta = 135°$$

演習3

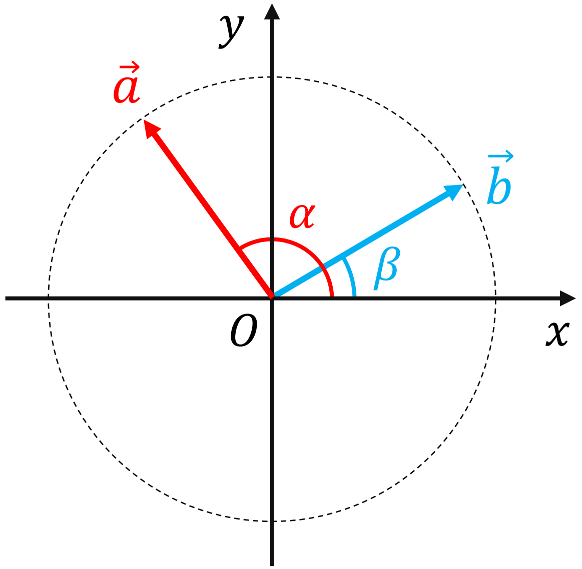
次に示す単位円上のベクトル$\vec{a}$,$\vec{b}$について以下の問に答えよ。

(1)　$\vec{a}=(a_1\,,a_2)$とし、$a_1\,,a_2$を求めよ。

(2)　$\vec{b}=(b_1\,,b_2)$とし、$b_1\,,b_2$を求めよ。

(3)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$を求めよ。

(4)　$\cos(\alpha-\beta)$を求めよ。



演習3（解答）

次に示す単位円上のベクトル$\vec{a}$,$\vec{b}$について以下の問に答えよ。

(1)　$\vec{a} = (a_1, a_2)$とし、a_1, a_2を求めよ。

$\vec{a} = (a_1, a_2) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

(2)　$\vec{b} = (b_1, b_2)$とし、b_1, b_2を求めよ。

$\vec{b} = (b_1, b_2) = (\cos\beta, \sin\beta)$

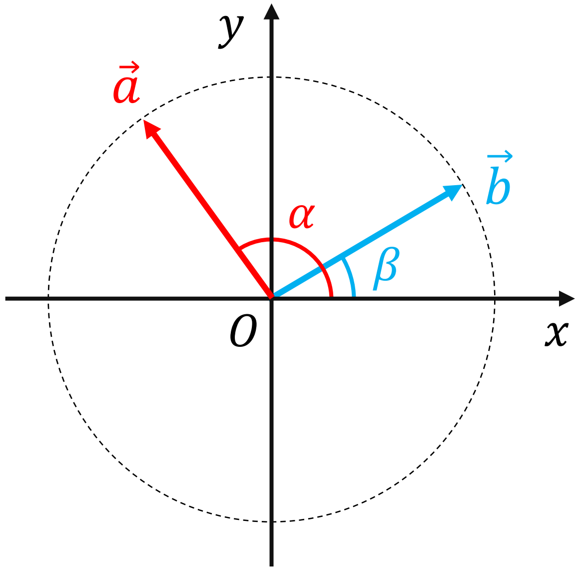
(3)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$を求めよ。

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

(4)　$\cos(\alpha-\beta)$を求めよ。

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\alpha-\beta) \rightarrow \cos(\alpha-\beta) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{1\times 1}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$



演習4

（1）　$\vec{a} = (4\,, -1, -3)$、$\vec{b} = (2\,, k, 5)$が直交するような実数kを求めよ。

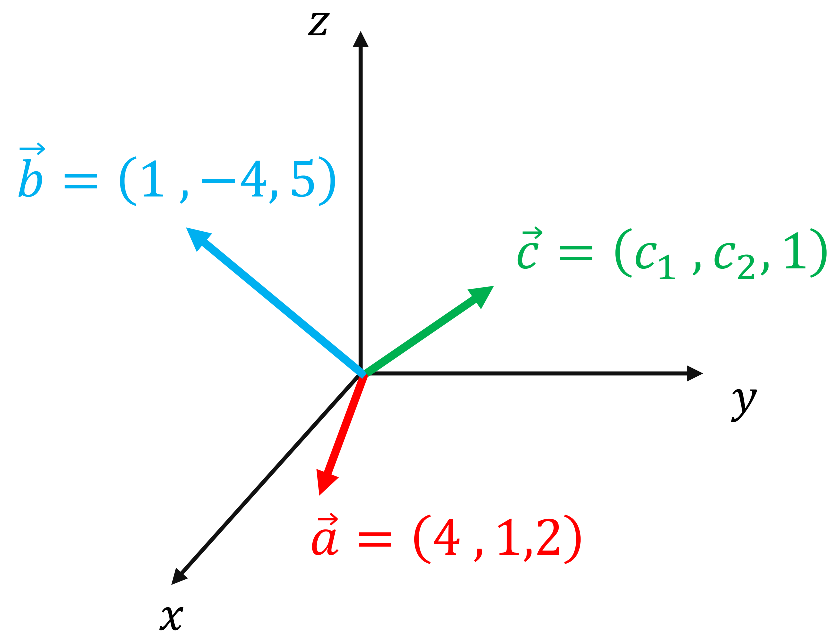
（2）　$\vec{a} = (3, 1{,}2)$、$\vec{b} = (1\,, -4{,}5)$それぞれに直交する$\vec{c} = (c_1\,, c_2, 1)$について、次の問に答えよ。

（a）　$\vec{a} \cdot \vec{c}$を式で示せ。

（b）　$\vec{b} \cdot \vec{c}$を式で示せ。

（c）　$\vec{c}$について$c_1\,, c_2$を求めよ。

（d）　$\vec{d} = k\vec{c}$（kは実数）について$|\vec{d}| = 1$となるkを求めよ。



演習4（解答）

（1）　$\vec{a}=(4,-1,-3)$、$\vec{b}=(2,k,5)$が直交するような実数kを求めよ。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times2+(-1)\times k+(-3)\times5=0\ \rightarrow 8-k-15=0\ \rightarrow k=7$

（2）　$\vec{a}=(3,1,2)$、$\vec{b}=(1,-4,5)$それぞれに直交する$\vec{c}=(c_1,c_2,1)$について、次の問に答えよ。

（a）　$\vec{a}\cdot\vec{c}$を式で示せ。

$\vec{a}\cdot\vec{c}=3\times c_1+1\times c_2+2\times1=0\ \rightarrow\ 3c_1+c_2=-2$

（b）　$\vec{b}\cdot\vec{c}$を式で示せ。

$\vec{b}\cdot\vec{c}=1\times c_1+(-4)\times c_2+5\times1=0\ \rightarrow\ c_1-4c_2=-5$

（c）　$\vec{c}$についてc_1,c_2を求めよ。

$3c_1+c_2=-2$
$12c_1+4c_2=-8$
$c_1-4c_2=-5$
$13c_1+\qquad=-13$
$c_1=-1$

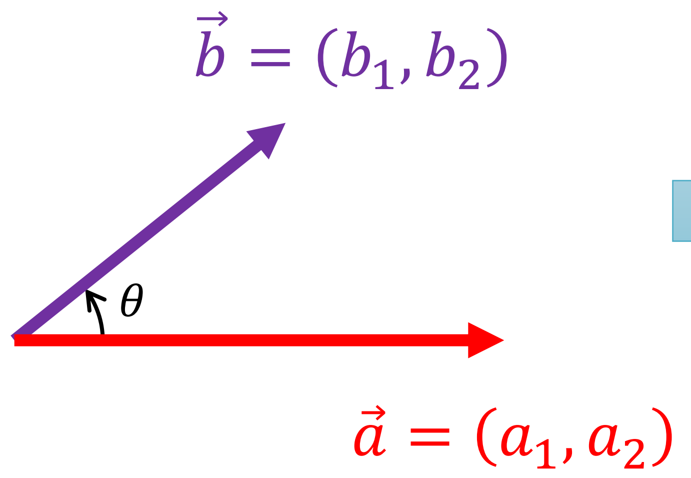
$3\times(-1)+c_2=-2$
$c_2=1$

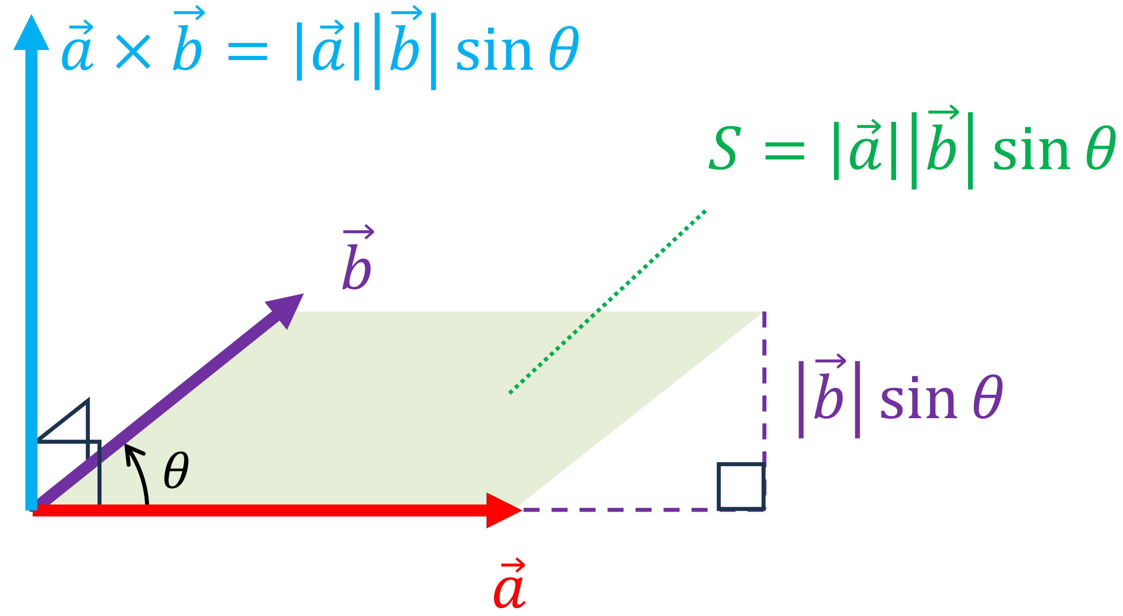
（d）　$\vec{d}=k\vec{c}$（kは正の実数）について$|\vec{d}|=1$となるkを求めよ。

$\vec{c}=(-1,1,1)\ \rightarrow|\vec{c}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

$\vec{d}=k\vec{c}\rightarrow\ |\vec{d}|=k|\vec{c}|=\sqrt{3}k=1\ \rightarrow k=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

外積





外積の公式

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0\,,0\,,a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$$
$$= |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

- 外積は2つのベクトルが直交するとき最大になる
  (2つのベクトルが平行のとき外積は0)
- 外積は2つのベクトルに対して直角な方向のベクトル
  ($\vec{a} \times \vec{b}$の場合、$\vec{a}$から$\vec{b}$への回転を元にした右ねじの方向)
- 外積の大きさは2つのベクトルが作る平行四辺形の面積

※外積はベクトル、内積はスカラー（値）
外積は直交で最大（平行で0）、内積は平行で最大（直交で0）

演習5

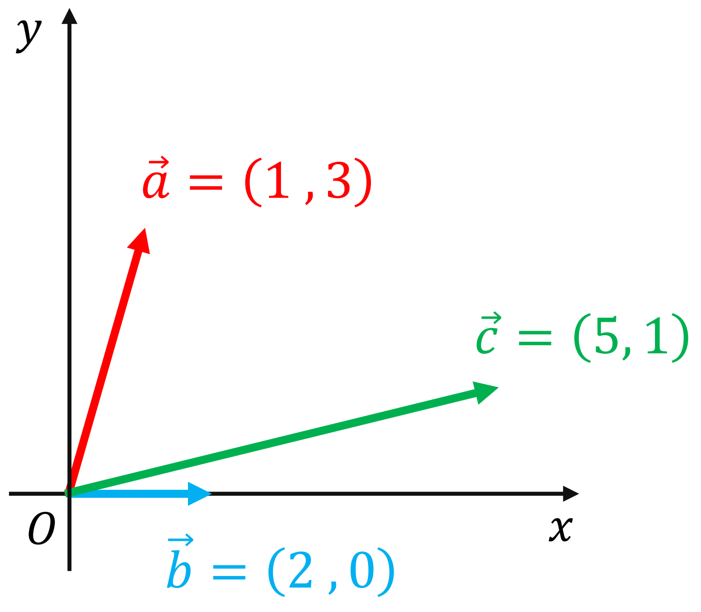
3つのベクトル$\vec{a}=(1,3)$、$\vec{b}=(2,0)$、$\vec{c}=(5,1)$について以下の問に答えよ。

(1)　$\vec{a}$、$\vec{b}$により張られる平行四辺形の面積を求めよ。

(2)　$\vec{a}$、$\vec{c}$により張られる平行四辺形の面積を求めよ。

(3)　$\vec{b}$、$\vec{c}$により張られる平行四辺形の面積を求めよ。

(4)　座標$A(1,3)$, $B(2,0)$, $C(5,1)$を頂点とする三角形ABCの面積を求めよ。



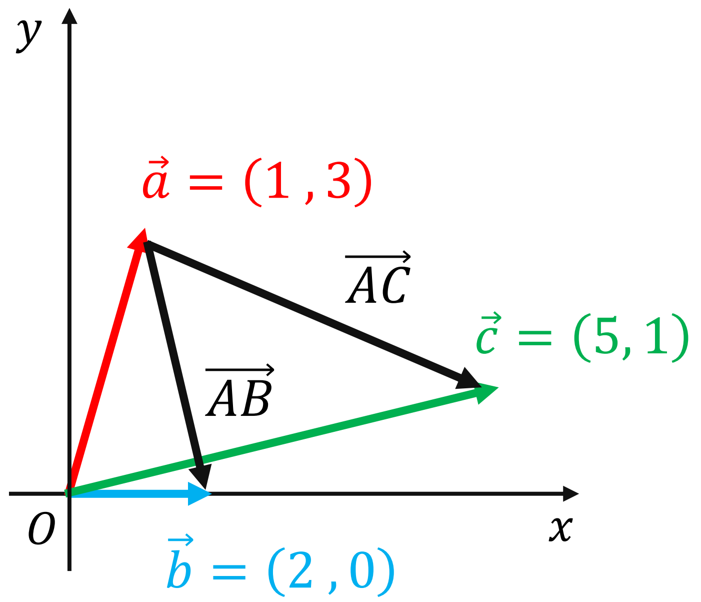
外積の公式

$\vec{a}\times\vec{b}=(0,0,a_1b_2-a_2b_1)$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$
$$=|a_1b_2-a_2b_1|$$

演習5

3つのベクトル$\vec{a}=(1,3)$、$\vec{b}=(2,0)$、$\vec{c}=(5,1)$について以下の問に答えよ。



(1)　$\vec{a}$、$\vec{b}$により張られる平行四辺形の面積を求めよ。

$|\vec{a}\times\vec{b}|=|1\times 0-3\times 2|=6$

(2)　$\vec{a}$、$\vec{c}$により張られる平行四辺形の面積を求めよ。

$|\vec{a}\times\vec{c}|=|1\times 1-3\times 5|=14$

(3)　$\vec{b}$、$\vec{c}$により張られる平行四辺形の面積を求めよ。

$|\vec{b}\times\vec{c}|=|2\times 1-0\times 5|=2$

(4)　座標$A(1,3)$, $B(2,0)$, $C(5,1)$を頂点とする三角形ABCの面積を求めよ。

$\overrightarrow{AB}=(2-1,0-3)=(1,-3)$

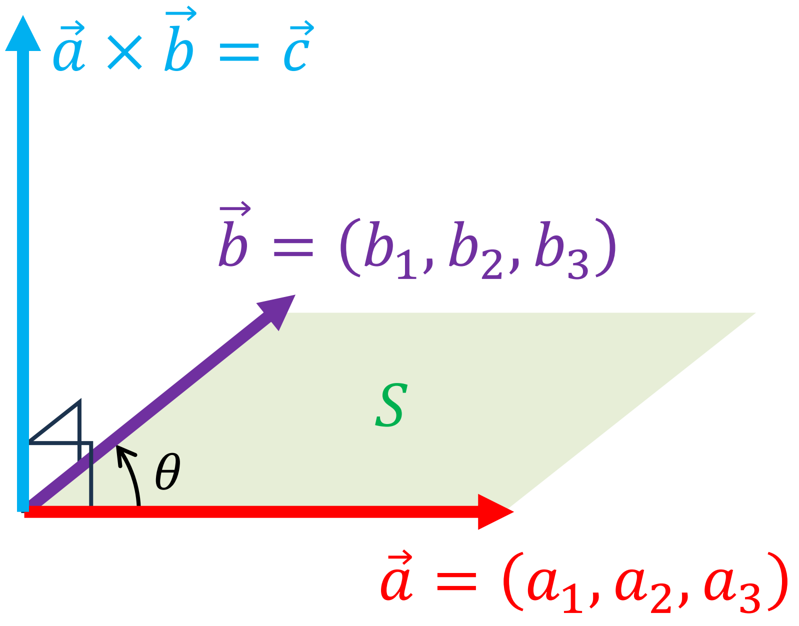
$\overrightarrow{AC}=(5-1,1-3)=(4,-2)$

$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=|1\times(-2)-(-3)\times 4|=10$

→平行四辺形の面積

$S=\dfrac{10}{2}=5$

外積(3次元ベクトル)



$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2\,, a_3 b_1 - a_1 b_3\,, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$S = \sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}$$

$$S = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \qquad |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$\vec{a} = (3\,, 1{,}2)$、$\vec{b} = (1\,, -4{,}5)$それぞれに直交する$\vec{c} = (c_1\,, c_2, 1)$を外積で求める。

$$\vec{c} = k(1 \times 5 - 2 \times (-4), 2 \times 1 - 3 \times 5{,}3 \times (-4) - 1 \times 1) = k(13, 13, -13)$$
$$\vec{c} = (c_1, c_2, 1) = k(13, 13, -13)$$
$$1 = -13k \ \rightarrow -\frac{1}{13} \qquad \vec{c} = -\frac{1}{13}(13, 13, -13) = (-1, -1{,}1)$$

演習6

e-DEN【イーデン】 × 電験どうでしょう Let me inject Energy to you!

空間上の3点$A(1,2,1)$**、**$B(2,3,2)$**、**$C(3,1,2)$**について以下の問に答えよ。**

（1）　Oを原点とするとき、$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$の外積を求めよ。

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2\,, a_3b_1 - a_1b_3\,, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$S = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

（2）　ベクトル$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$の外積を求めよ。

$$S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \qquad |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

（3）　ベクトル$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$により張られる平行四辺形の面積を求めよ。

演習６（解答）

空間上の３点$A(1,2,1)$、$B(2,3,2)$、$C(3,1,2)$について以下の問に答えよ。

（1）　Oを原点とするとき、$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$の外積を求めよ。

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(2\times2-1\times3\,,1\times2-1\times2\,,1\times3-2\times2)=(1\,,0\,,-1)$$

（2）　ベクトル$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$の外積を求めよ。

$$\overrightarrow{AB}=(2-1,3-2,2-1)=(1,1,1) \qquad \overrightarrow{AC}=(3-1,1-2,2-1)=(2,-1,1)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1\times1-1\times(-1)\,,1\times2-1\times1\,,1\times(-1)-1\times2)=(2\,,1\,,-3)$$

（3）　ベクトル$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$により張られる平行四辺形の面積を求めよ。

$$S=\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$$

ご聴講ありがとう
ございました!!