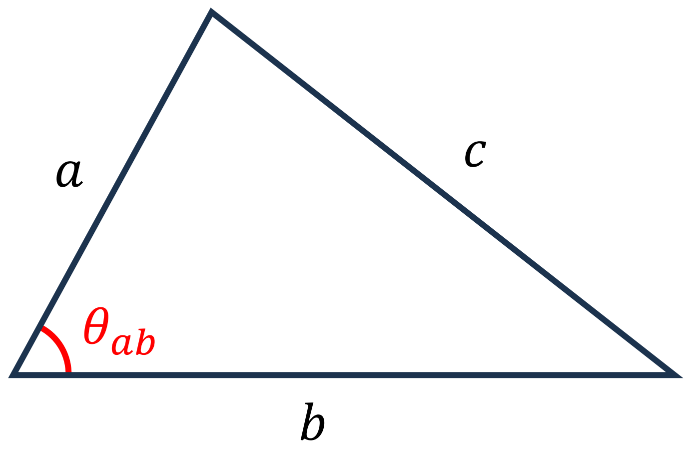
電験三種　オンライン講座

電気数学　第20回
三角関数
（余弦定理、加法定理）

2024.09.22 Sun

余弦定理

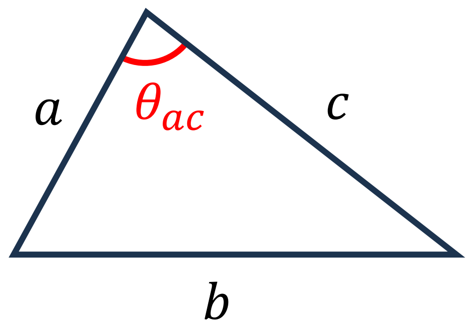


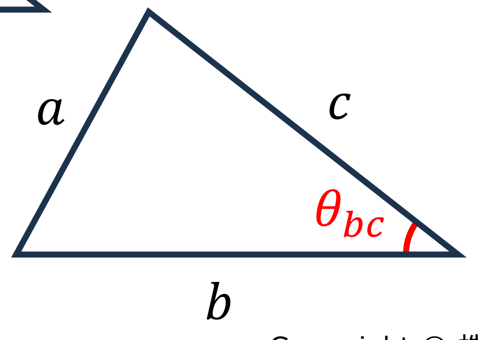
直角三角形でなくても、三角形の内角が分かれば、
各辺の長さの関係を式で表すことができる

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta_{ab}$$

$\theta_{ab} = 90°$**のとき、三平方の定理が成立する**（$\cos 90° = 0$）

$$c^2 = a^2 + b^2$$



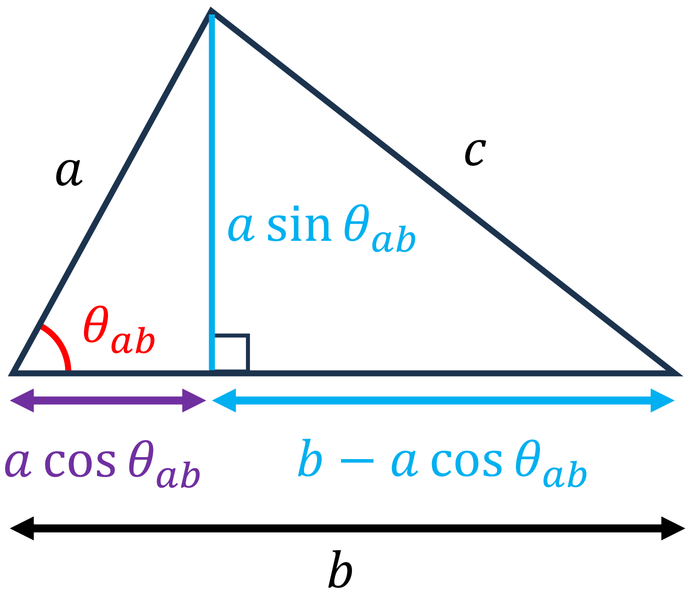


2辺の間の角が分かれば、どの辺でも余弦定理は成立する
（左辺はもっとも長い辺じゃなくてもよい）

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta_{ac}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta_{bc}$$

余弦定理



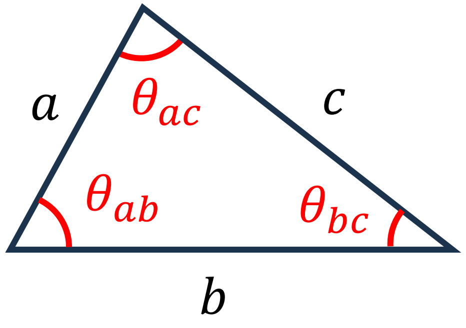
三平方の定理を利用して余弦定理を証明する

$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2\sin^2\theta_{ab} + (b - a\cos\theta_{ab})^2 \\
&= a^2\sin^2\theta_{ab} + b^2 - 2ab\cos\theta_{ab} + a^2\cos^2\theta_{ab} \\
&= a^2\sin^2\theta_{ab} + a^2\cos^2\theta_{ab} + b^2 - 2ab\cos\theta_{ab} \\
&= a^2(\sin^2\theta_{ab} + \cos^2\theta_{ab}) + b^2 - 2ab\cos\theta_{ab} \\
&= a^2 \times 1 + b^2 - 2ab\cos\theta_{ab}
\end{aligned}
$$

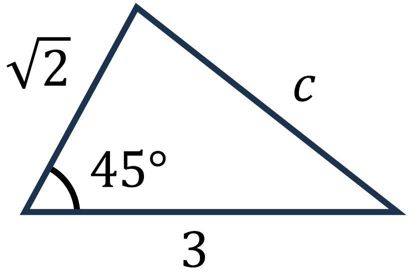
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta_{ab}$$

練習問題Ⅰ

図に示す三角形について、以下の問に答えよ。

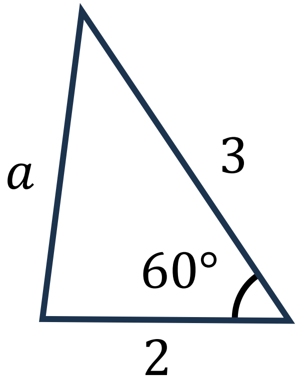


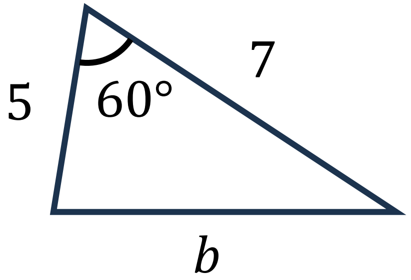
（1）　$\theta_{ab}=45°$、$b=3$、$a=\sqrt{2}$のとき、cを求めよ。



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta_{ab}$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\theta_{ac}$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\theta_{bc}$$

（2）　$\theta_{bc}=60°$、$b=2$、$c=3$のとき、aを求めよ。



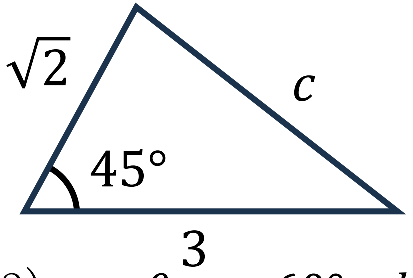


（3）　$\theta_{ac}=60°$、$a=5$、$c=7$のとき、bを求めよ。

練習問題Ⅰ（解答）

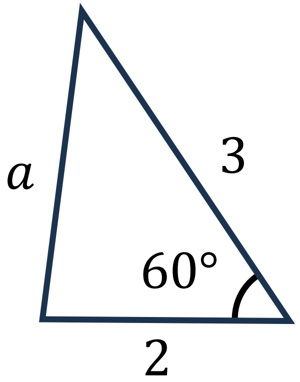
図に示す三角形について、以下の問に答えよ。

（1）　$\theta_{ab}=45°$、$b=3$、$a=\sqrt{2}$のとき、cを求めよ。



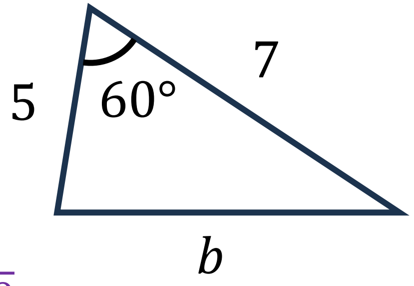
$$c^2=3^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\cdot3\cdot\sqrt{2}\cos45°=9+2-6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=5\ \rightarrow c=\sqrt{5}$$

（2）　$\theta_{bc}=60°$、$b=2$、$c=3$のとき、aを求めよ。



$$a^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos60°=4+9-12\cdot\frac{1}{2}=7\ \rightarrow a=\sqrt{7}$$

（3）　$\theta_{ac}=60°$、$a=5$、$c=7$のとき、bを求めよ。

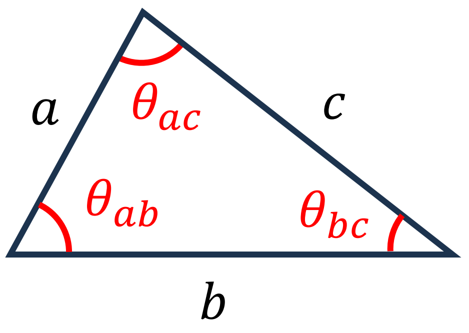


$$b^2=5^2+7^2-2\cdot5\cdot7\cos60°=25+49-70\cdot\frac{1}{2}=39\ \rightarrow b=\sqrt{39}$$

練習問題2

図に示す三角形について、以下の問に答えよ。

（1）　$a=3$、$b=5$、$c=7$のとき、θ_{ab}を求めよ。



（2）　$a=3$、$b=5$、$c=7$のとき、$\cos\theta_{bc}$を求めよ。

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta_{ab}$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\theta_{ac}$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\theta_{bc}$$

（3）　$a=3$、$b=5$、$c=7$のとき、$\cos\theta_{ac}$を求めよ。

練習問題2（解答）

図に示す三角形について、以下の問に答えよ。

（1）　$a=3$、$b=5$、$c=7$のとき、θ_{ab}を求めよ。

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta_{ab} \rightarrow \cos\theta_{ab}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}=\frac{9+25-49}{30}=-\frac{15}{30}=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\theta_{ab}=-\frac{1}{2} \rightarrow \theta_{ab}=120°$$

（2）　$a=3$、$b=5$、$c=7$のとき、$\cos\theta_{bc}$を求めよ。

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\theta_{bc} \rightarrow \cos\theta_{bc}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+7^2-3^2}{2\cdot5\cdot7}=\frac{25+49-9}{70}=\frac{65}{70}=\frac{13}{14}$$

$$\cos\theta_{bc}=\frac{13}{14}$$

（3）　$a=3$、$b=5$、$c=7$のとき、$\cos\theta_{ac}$を求めよ。

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\theta_{ac} \rightarrow \cos\theta_{ac}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{3^2+7^2-5^2}{2\cdot3\cdot7}=\frac{9+49-25}{42}=\frac{33}{42}=\frac{11}{14}$$

$$\cos\theta_{ac}=\frac{11}{14}$$

加法定理

１つの三角関数を２つの三角関数に成分で表現するための公式

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

加法定理を利用することで、有名角（30°,45°,60°）以外の角度の三角関数の値を求めることができる

$$\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

練習問題3

以下の問に答えよ。

(1)　$\cos 75°$

(2)　$\sin 15°$

(3)　$\cos 15°$

(4)　$\tan 15°$

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

練習問題３（解答）

以下の問に答えよ。

（1）　$\cos 75°$

$$\cos(45° + 30°) = \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

（2）　$\sin 15°$

$$\sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

（3）　$\cos 15°$

$$\cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} + 1\right)$$

（4）　$\tan 15°$

$$\tan 15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} + 1\right)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\left(\sqrt{3} + 1\right)\left(\sqrt{3} - 1\right)} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

練習問題4

次の式を証明せよ。

(1)　$\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$

(2)　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

(3)　$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

(4)　$\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

練習問題4（解答）

次の式を証明せよ。

(1) $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \frac{\dfrac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\dfrac{\sin a}{\cos a} + \dfrac{\sin b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

(2) $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$ **二倍角の公式**

$$\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta = 2\cos\theta\sin\theta$$

(3) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ **二倍角の公式**

$$\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\begin{aligned}\cos^2\theta - \sin^2\theta &= 1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1\end{aligned}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\rightarrow\ \cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

(4) $\sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$

$$\frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \frac{1 - (\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{2} = \frac{1 - (1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta)}{2} = \frac{2\sin^2\theta}{2} = \sin^2\theta$$

半角の公式

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{2}$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2}$$

練習問題5

以下の問に答えよ。

(1)　θが第一象限（$0° \leq a \leq 90°$）の角で、$\cos\theta = 4/5$のとき、$\cos 2\theta$の値を求めよ。

(2)　θが第二象限（$90° \leq a \leq 180°$）の角で、$\sin\theta = 3/4$のとき、$\sin 2\theta$の値を求めよ。

(3)　$\sin 22.5°$の値を求めよ。

二倍角の公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

半角の公式

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$
$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

練習問題5（解答）

以下の問に答えよ。

（1）　θが第一象限（$0° \leq a \leq 90°$）の角で、$\cos\theta = 4/5$のとき、$\cos 2\theta$の値を求めよ。

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25}$$

（2）　θが第二象限（$90° \leq a \leq 180°$）の角で、$\sin\theta = 3/4$のとき、$\sin 2\theta$の値を求めよ。

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

第二象限より、

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2 \times \frac{3}{4} \times \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

（3）　$\sin 22.5°$の値を求めよ。

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{2} \rightarrow \sin^2 22.5° = \frac{1 - \cos 45°}{2} \rightarrow \sin 22.5° = \sqrt{\frac{1 - \cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

加法定理の応用

【イーデン】 e-DEN × 電験どうでしょう Let me inject Energy to you!

積和公式（積→和）

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) + \sin(a-b)\}$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) - \sin(a-b)\}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b) + \cos(a-b)\}$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a+b) - \cos(a-b)\}$$

和積公式（和→積）

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

練習問題6

以下の問に答えよ。

(1)　次の式を和または差の形に直せ。

(a)　$\cos 3\theta \cos 5\theta$

(b)　$\sin 7\theta \sin 2\theta$

(2)　次の式を積の形に直せ。

(c)　$\sin 4\theta + \sin 2\theta$

(d)　$\cos 3\theta + \cos 5\theta$

積和公式（積→和）

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) + \sin(a-b)\}$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) - \sin(a-b)\}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b) + \cos(a-b)\}$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a+b) - \cos(a-b)\}$$

和積公式（和→積）

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

練習問題6

以下の問に答えよ。

(1)　次の式を和または差の形に直せ。

(a)　$\cos 3\theta \cos 5\theta$

$$= \frac{1}{2}\{\cos 8\theta + \cos 2\theta\}$$

(b)　$\sin 7\theta \sin 2\theta$

$$= -\frac{1}{2}\{\cos 9\theta - \cos 5\theta\}$$

(2)　次の式を積の形に直せ。

(c)　$\sin 4\theta + \sin 2\theta$

$$= 2\sin\frac{4\theta + 2\theta}{2}\cos\frac{4\theta - 2\theta}{2} = 2\sin 3\theta\cos\theta$$

(d)　$\cos 3\theta + \cos 5\theta$

$$= 2\cos\frac{5\theta + 3\theta}{2}\cos\frac{5\theta - 3\theta}{2} = 2\cos 4\theta\cos\theta$$

積和公式（積→和）

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) + \sin(a-b)\}$$

$$\cos a\sin b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) - \sin(a-b)\}$$

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b) + \cos(a-b)\}$$

$$\sin a\sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a+b) - \cos(a-b)\}$$

和積公式（和→積）

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

ご聴講ありがとう
ございました!!