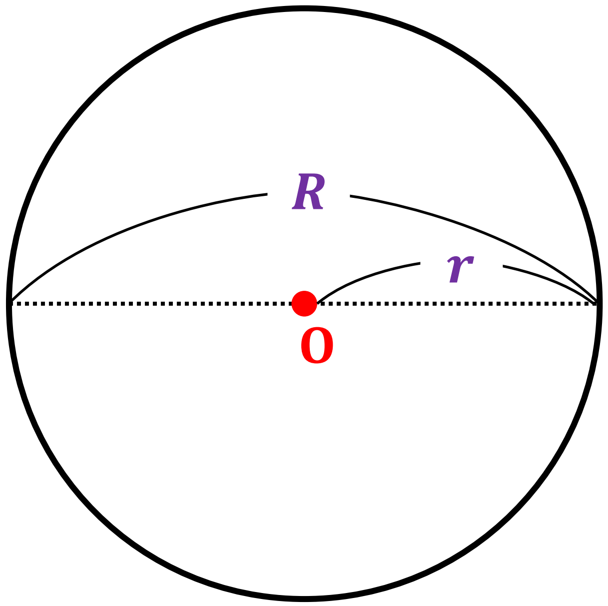
電験三種　オンライン講座

電気数学　第19回
図形
(円の方程式、立体図形)

2024.09.15 Sun

円とは

ある点（中心）からの距離が等しい点の集合でできる曲線のこと



中心 O：円の真ん中にあたる点
円周 ：円を現す曲線

半径 r：円の中心から円周までの線分
直径 R：円の中心を通り、円周上の2点を通る線分

直径と半径は以下の関係がある

$$R = 2r$$

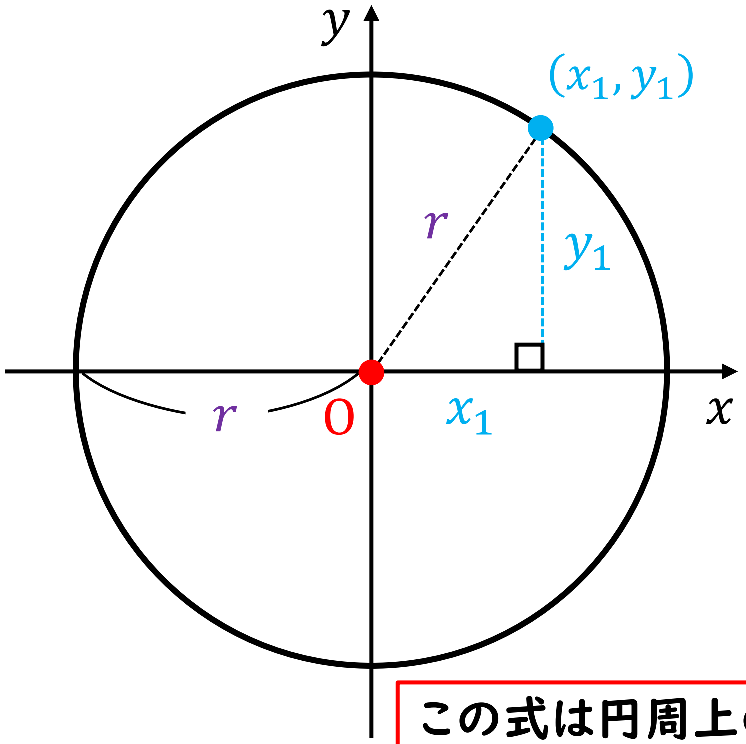
<円周と直径の関係>
円周をまっすぐ伸ばして長さを調べると、
直径の約3.14倍になる（きれいな倍率にはならない）

$$\text{円周} = \pi R = 2\pi r \qquad \text{円周率 } \pi = 3.141592\cdots$$

xy平面と円

円の中心が原点と一致する場合、
円周上の点(x_1, y_1)は以下の式を満たす

$$\boldsymbol{x_1^2 + y_1^2 = r^2}$$



この式は円周上の全て点で成り立つため、
半径rの円は以下の式で表すことができる
$\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$　**（円の方程式）**

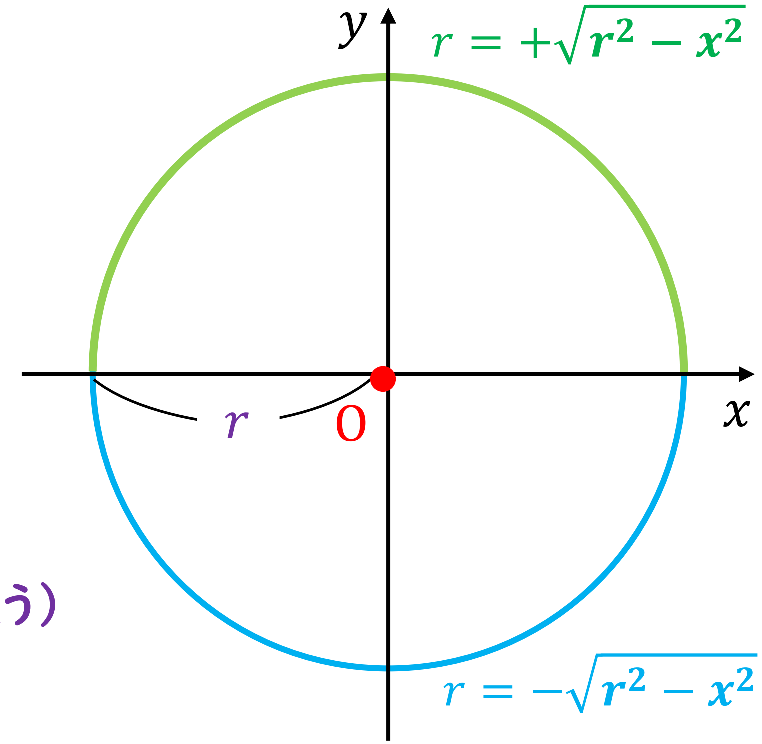
円の式を$y = f(x)$の形で表すと、

$$\boldsymbol{y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}}$$

となり、

$$\boldsymbol{y = +\sqrt{r^2 - x^2}}$$
$$\boldsymbol{y = -\sqrt{r^2 - x^2}}$$

という2つの式に分かれる。
（$\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$とは少し意味が違う）

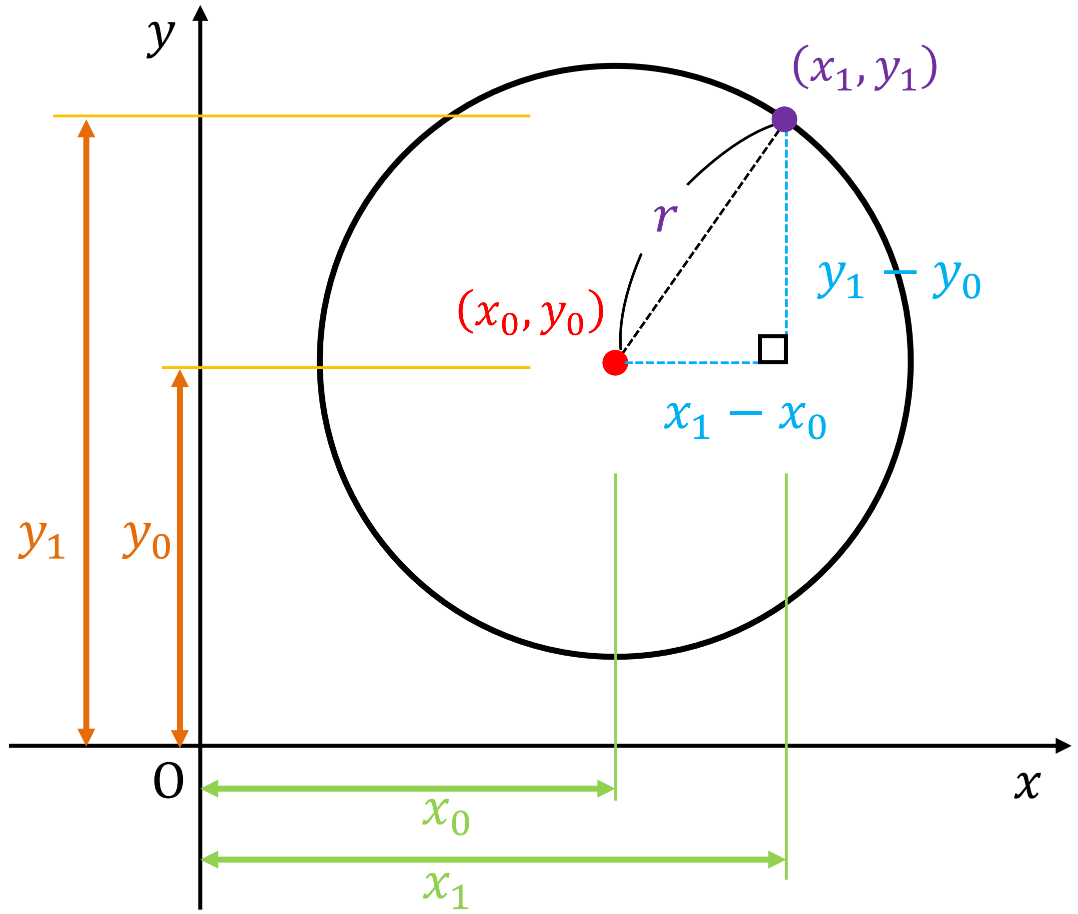


$y = f(x)$のように1つのxに対して1つのyが
決まる関数を**陽関数**
$g(x, y) = 0$で表し、xとyの組み合わせで式が
成立する関数を**陰関数**という
（円の方程式は陰関数の仲間）

xy平面と円

円の中心が点(x_0, y_0)の場合、円の方程式は、

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



例1：中心が$C(1, -2)$、半径3の円の方程式

$$(x-1)^2 + \left(y - (-2)\right)^2 = 3^2$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$$

例2：$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$ を表す図形

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y + 1 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 9 + 1 = 0$$

$$(x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 + 1 = 0$$
$$(x+2)^2 + (y-3)^2 - 12 = 0$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 12 = \left(3\sqrt{2}\right)^2$$

中心が$C(-2, +3)$、半径$3\sqrt{2}$の円の方程式

練習問題1

次の円の方程式を求めよ。

（1）　中心が$C(-1,3)$、半径が$\sqrt{2}$の円

（2）　中心が$C(-2,0)$で点$A(1,3)$を通る円

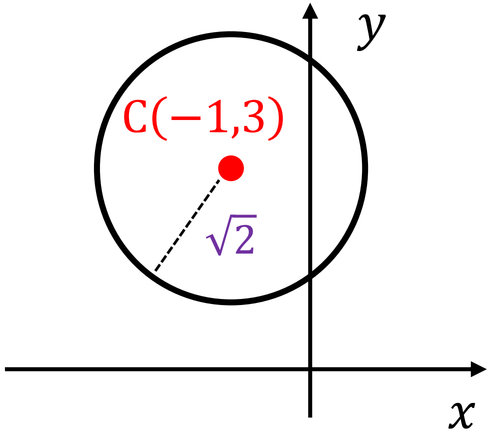
（3）　2点$A(1,2)$、$B(3,5)$を直径の両端とする円

練習問題１（解答）

次の円の方程式を求めよ。

(1)　中心がC(−1,3)、半径が$\sqrt{2}$の円

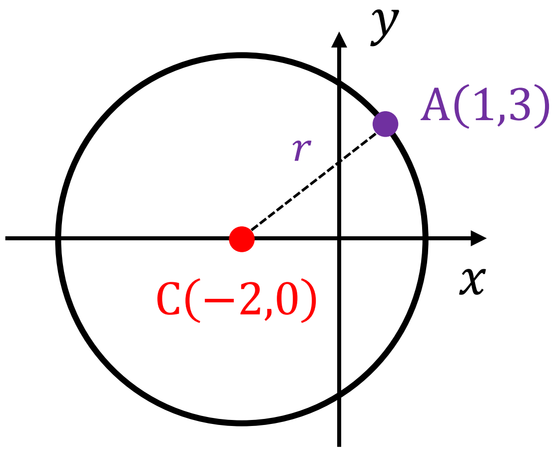
$$\left(x-(-1)\right)^2+(y-3)^2=(\sqrt{2})^2$$
$$(x+1)^2+(y-3)^2=2$$



(2)　中心がC(−2,0)で点A(1,3)を通る円

$$r^2=\left(1-(-2)\right)^2+(3-0)^2=3^2+3^2=18$$

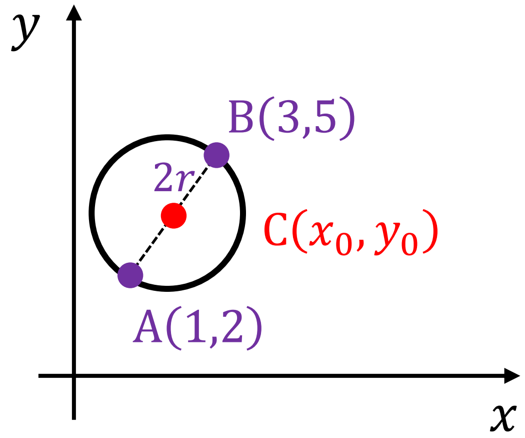
$$\left(x-(-2)\right)^2+(y-0)^2=18$$
$$(x+2)^2+y^2=18$$



(3)　2点A(1,2)、B(3,5)を直径の両端とする円

$$(2r)^2=(3-1)^2+(5-2)^2=2^2+3^2=13$$
$$4r^2=13\rightarrow r^2=\frac{13}{4}\rightarrow r=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$(x_0,y_0)=\left(\frac{3+1}{2},\frac{5+2}{2}\right)=\left(2,\frac{7}{2}\right)$$
$$(x-2)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$$



練習問題2

次の円の方程式の中心と半径を求めよ。

（1）　$x^2+y^2-8x+2y+1=0$

（2）　$x^2+y^2+3x-y+1=0$

（3）　$x^2+y^2-4x+6y+4=0$

（4）　$x^2+y^2+4x-5y+1=0$

練習問題2（解答）

次の円の方程式の中心と半径を求めよ。

（1）　$x^2+y^2-8x+2y+1=0$

$$x^2-8x+y^2+2y+1=0$$
$$x^2-8x+16-16+y^2+2y+1-1+1=0$$

$$(x-4)^2+(x+1)^2-16=0$$
$$(x-4)^2+(x+1)^2=4^2$$

$\mathrm{C}(4,-1)\,,r=4$

（2）　$x^2+y^2+3x-y+1=0$

$$x^2+3x+y^2-y+1=0$$
$$x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1=0$$
$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{6}{4}=0$$
$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$$

$\mathrm{C}\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right),r=\frac{\sqrt{6}}{2}$

（3）　$x^2+y^2-4x+6y+4=0$

$$x^2-4x+y^2+6y+4=0$$
$$x^2-4x+4-4+y^2+6y+9-9+4=0$$

$$(x-2)^2+(x+3)^2-9=0$$
$$(x-2)^2+(x+3)^2=3^2$$

$\mathrm{C}(2,-3)\,,r=3$

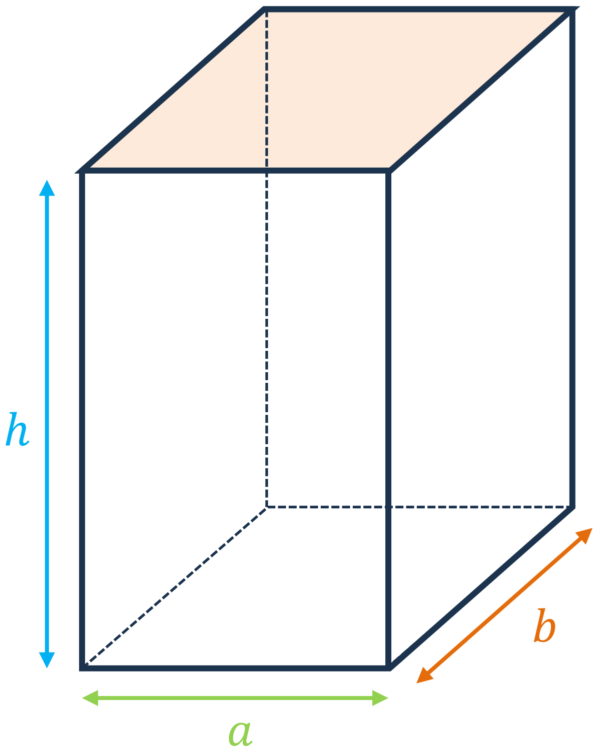
（4）　$x^2+y^2+4x-5y+1=0$

$$x^2+4x+y^2-5y+1=0$$
$$x^2+4x+4-4+y^2-5y+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+1=0$$
$$(x+2)^2+\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{37}{4}=0$$
$$(x+2)^2+\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2$$

$\mathrm{C}\left(-2,\frac{5}{2}\right),r=\frac{\sqrt{37}}{2}$

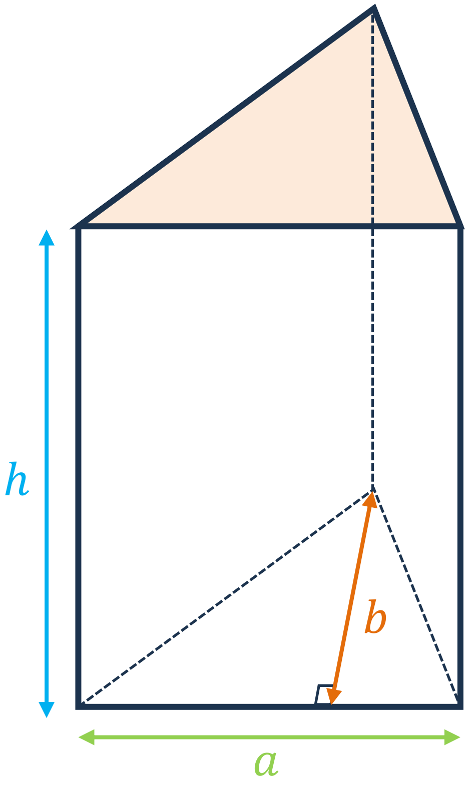
角柱と円柱の体積

四角柱



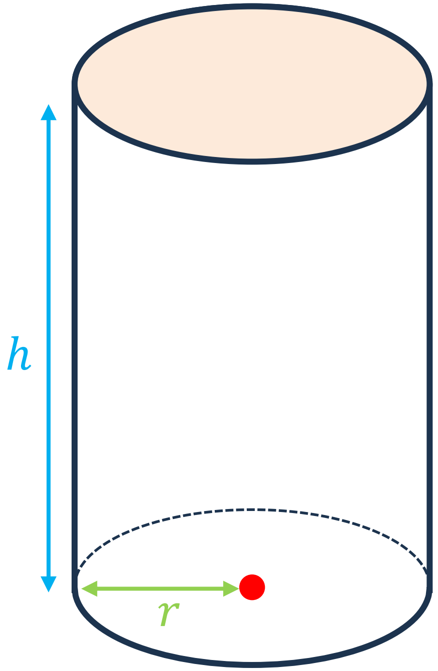
$$V = a \times b \times h$$

三角柱



$$V = \frac{a \times b}{2} \times h$$

円柱

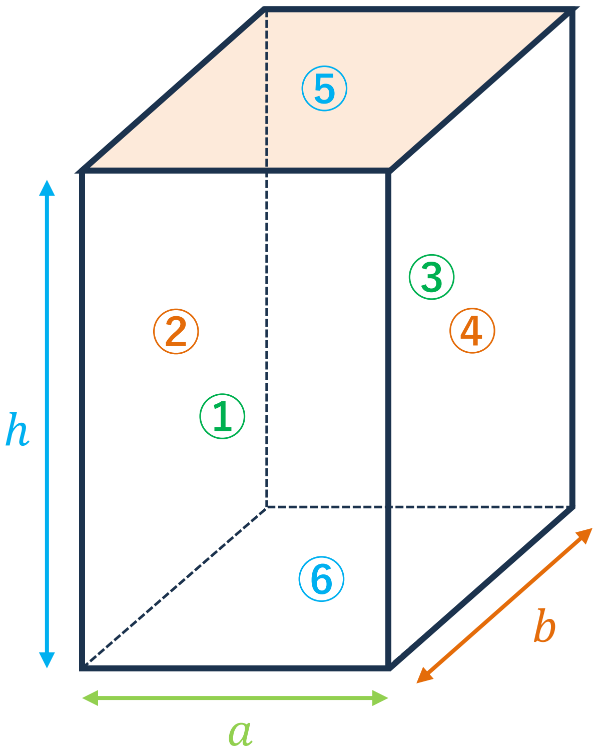


$$V = \pi r^2 \times h$$

体積＝底面積×高さ
で求められる

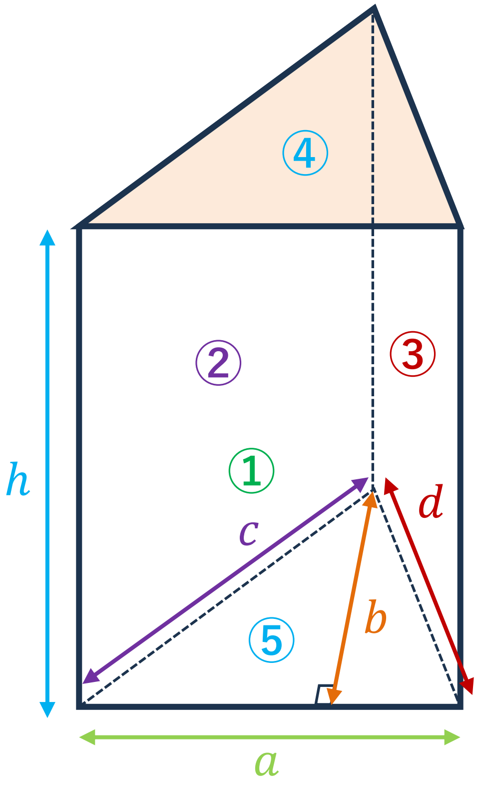
角柱の表面積

四角柱



$$S = ① + ② + ③ + ④ + ⑤ + ⑥$$
$$S = 2 \times ① + 2 \times ③ + 2 \times ⑤$$
$$S = 2(ah + bh + ab)$$

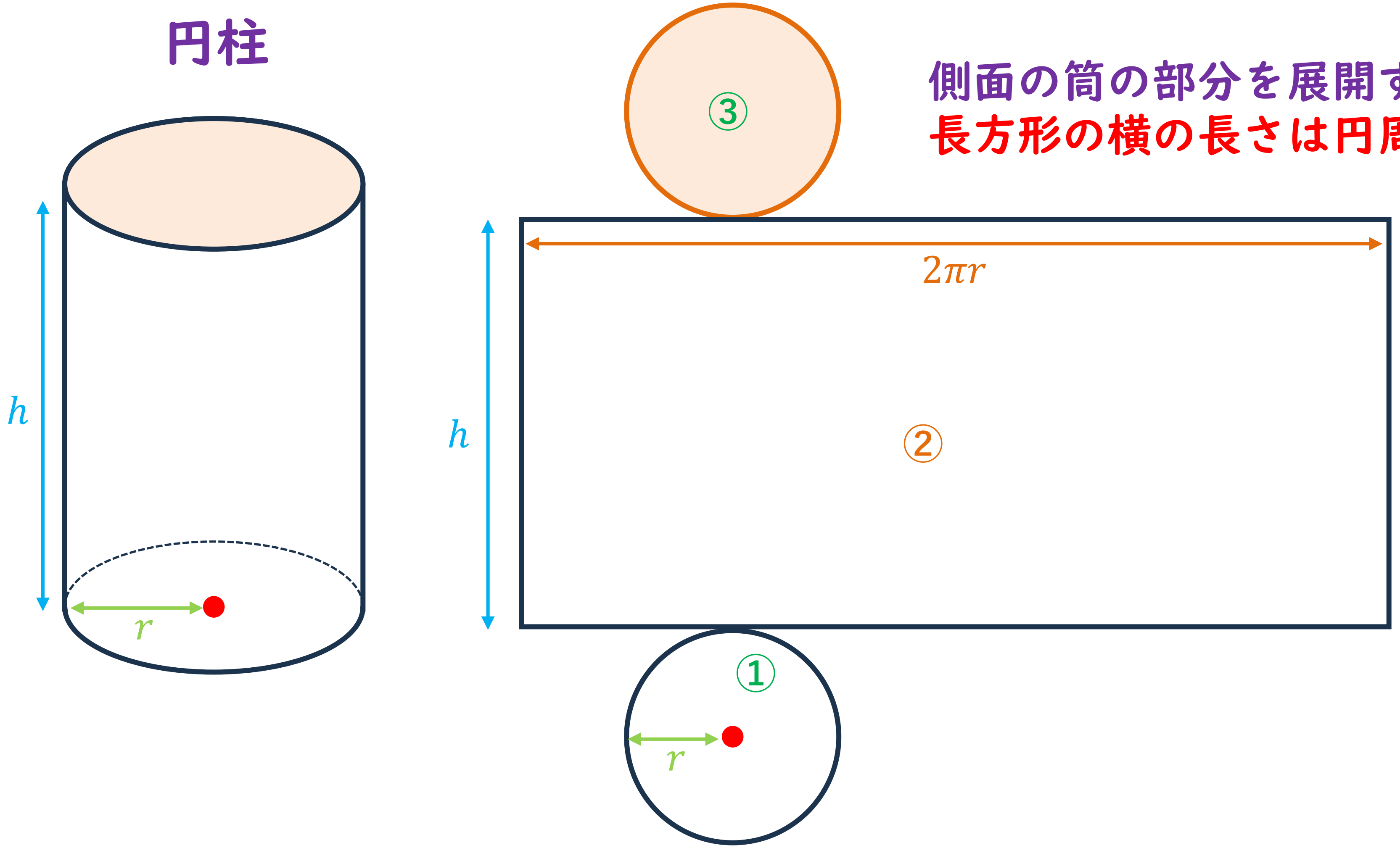
三角柱



$$S = ① + ② + ③ + ④ + ⑤$$
$$S = ① + ② + ③ + 2 \times ④$$
$$S = ah + ch + dh + ab$$

各面の面積の総和を
表面積という

円柱の表面積



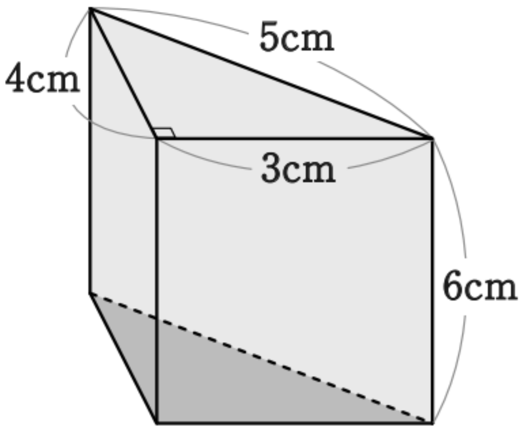
側面の筒の部分を展開すると長方形になる
長方形の横の長さは円周の長さと一致する

$S = ① + ② + ③$
$S = 2 \times ① + ②$
$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

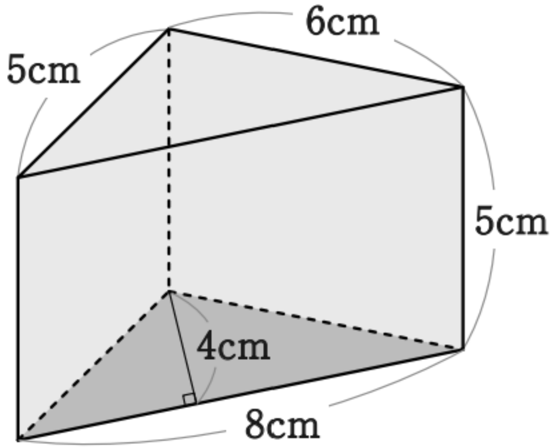
練習問題3

次の立体の体積と表面積を求めよ。

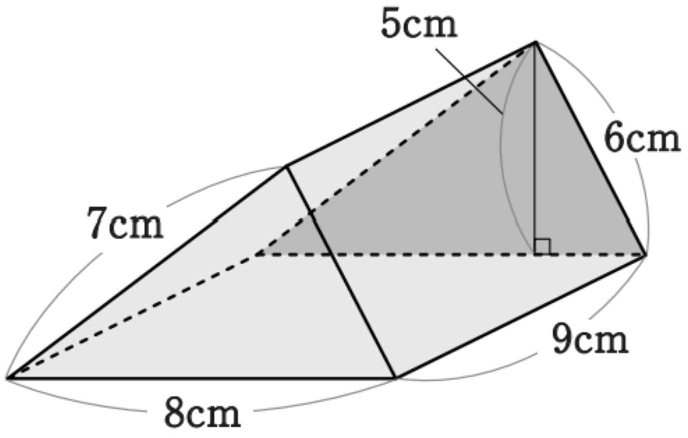
(1)



(2)



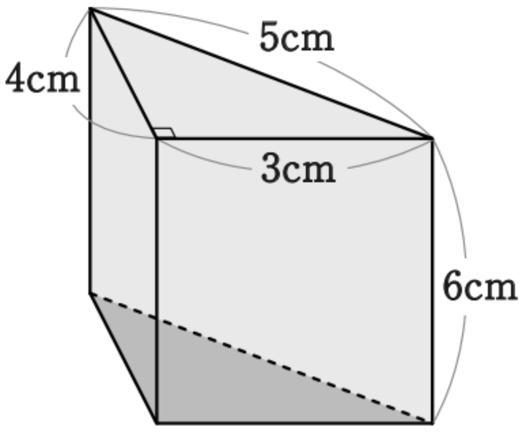
(3)



練習問題3（解答）

次の立体の体積と表面積を求めよ。

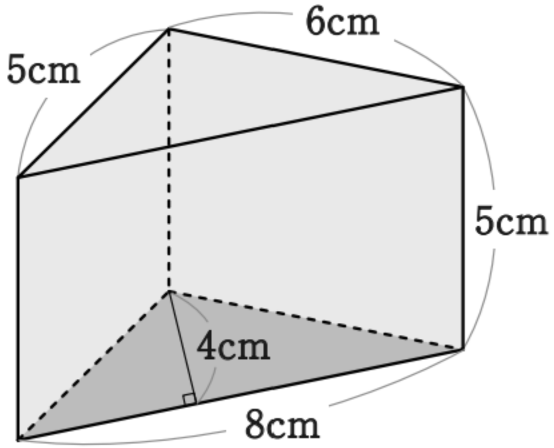
(1)



$$V = 4 \times 3 \times \frac{1}{2} \times 6 = 36\ \mathrm{cm}^3$$

$$\begin{aligned} S &= 4 \times 3 \times \frac{1}{2} \times 2 + 4 \times 6 + 3 \times 6 + 5 \times 6 \\ &= 4 \times 3 + 6 \times (4 + 3 + 5) \\ &= 12 + 6 \times 12 \\ &= 84\ \mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

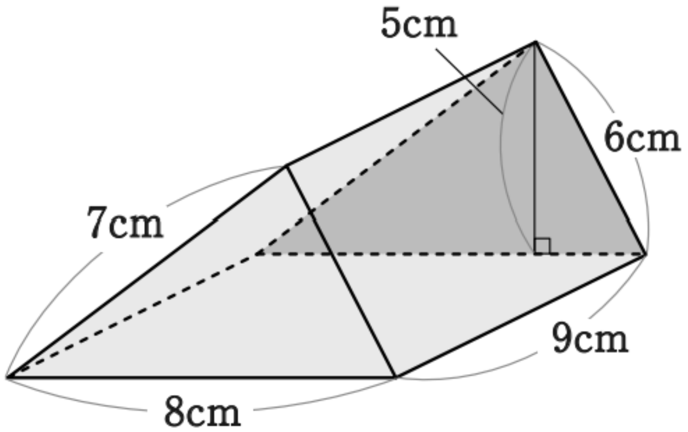
(2)



$$V = 8 \times 4 \times \frac{1}{2} \times 5 = 80\ \mathrm{cm}^3$$

$$\begin{aligned} S &= 8 \times 4 + 5 \times (8 + 5 + 6) \\ &= 32 + 5 \times 19 \\ &= 127\ \mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

(3)



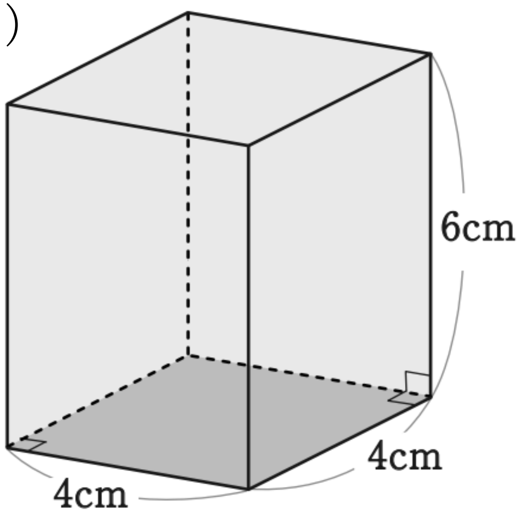
$$V = 5 \times 8 \times \frac{1}{2} \times 9 = 180\ \mathrm{cm}^3$$

$$\begin{aligned} S &= 5 \times 8 + 9 \times (8 + 7 + 6) \\ &= 40 + 9 \times 21 \\ &= 229\ \mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

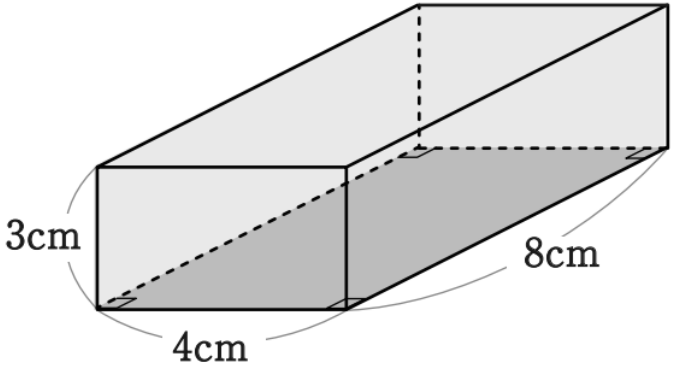
練習問題4

次の立体の体積と表面積を求めよ。

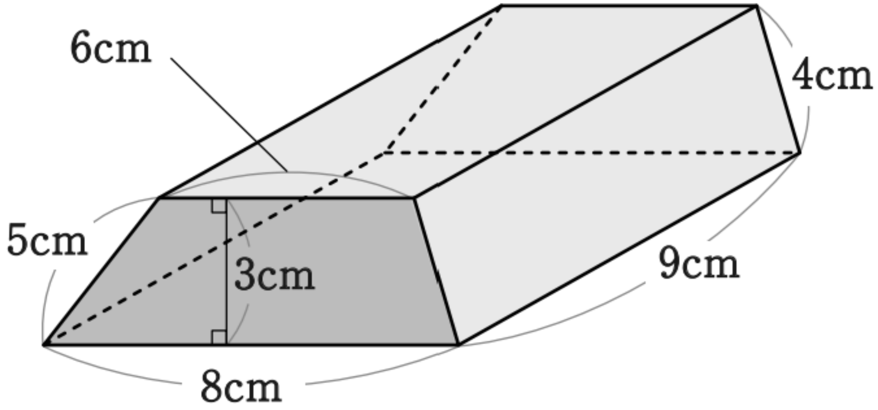
(1)



(2)



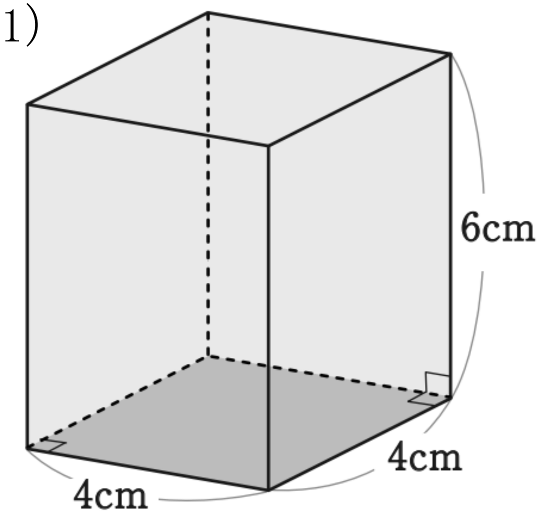
(3)



練習問題4（解答）

次の立体の体積と表面積を求めよ。

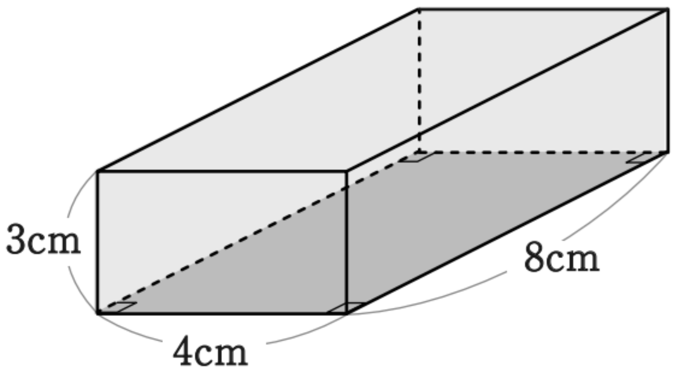
(1)



$$V = 4 \times 4 \times 6 = 96\ \mathrm{cm}^3$$

$$\begin{aligned} S &= (4 \times 4 + 4 \times 6 + 4 \times 6) \times 2 \\ &= (16 + 24 + 24) \times 2 \\ &= 64 \times 2 \\ &= 128\ \mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

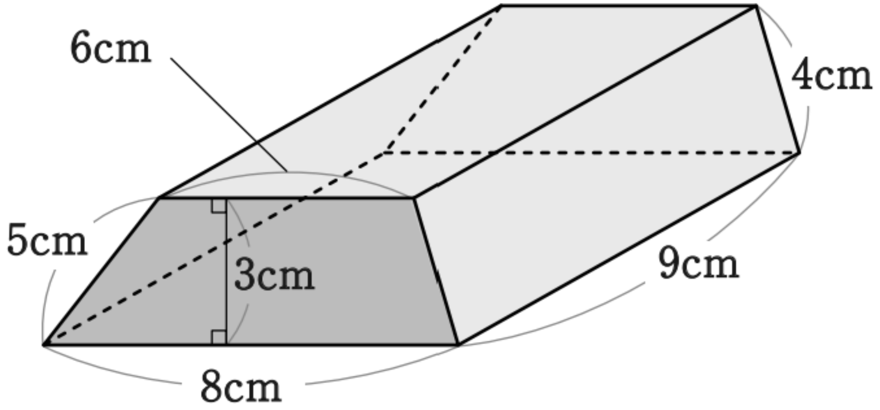
(2)



$$V = 3 \times 4 \times 8 = 96\ \mathrm{cm}^3$$

$$\begin{aligned} S &= (3 \times 4 + 3 \times 8 + 4 \times 8) \times 2 \\ &= (12 + 24 + 32) \times 2 \\ &= 68 \times 2 \\ &= 134\ \mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

(3)



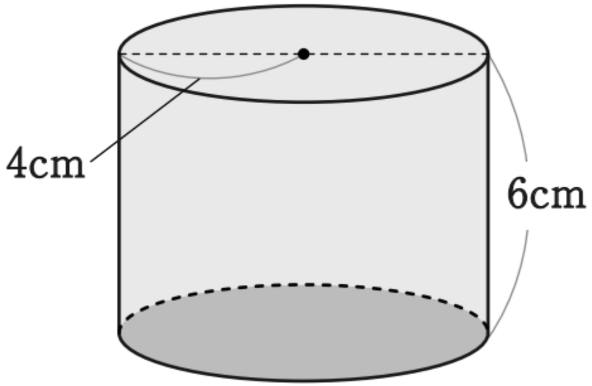
$$\begin{aligned} V &= (6 + 8) \times 3 \times \frac{1}{2} \times 9 \\ &= 21 \times 9 = 189\ \mathrm{cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= 21 \times 2 + 9 \times (6 + 5 + 8 + 4) \\ &= 42 + 9 \times 23 \\ &= 42 + 207 \\ &= 249\ \mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

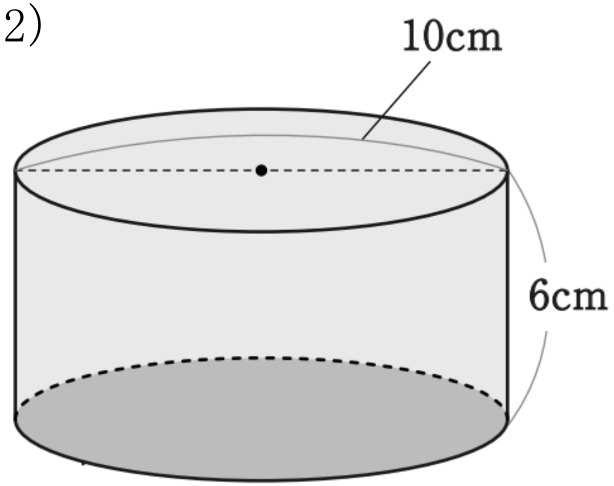
練習問題5

次の立体の体積と表面積を求めよ。

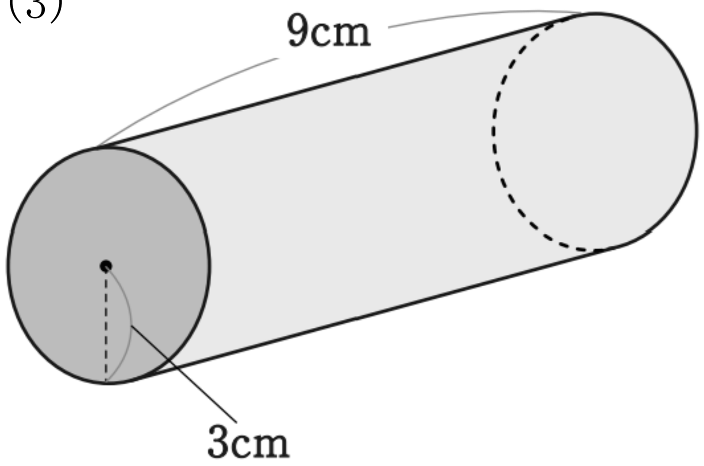
(1)



(2)



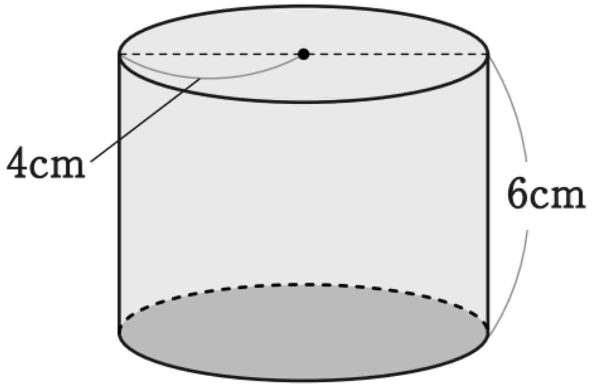
(3)



練習問題5（解答）

次の立体の体積と表面積を求めよ。

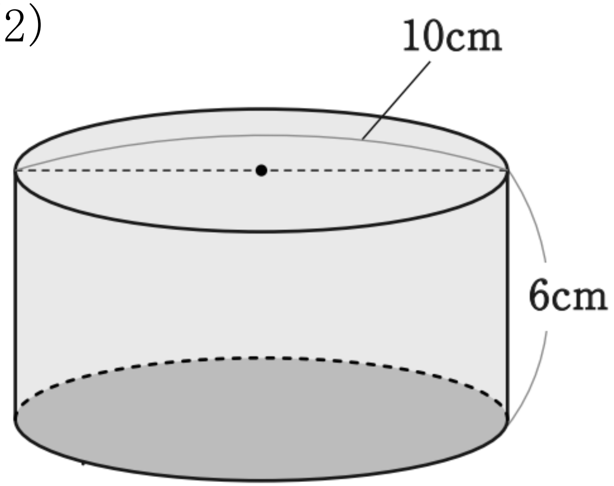
(1)



$V = \pi \times 4^2 \times 6 = 96\pi \text{ cm}^3$

$$\begin{aligned} S &= 2 \times \pi \times 4^2 + 2\pi \times 4 \times 6 \\ &= 2\pi \times 4 \times (4+6) \\ &= 2\pi \times 4 \times 10 \\ &= 80\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

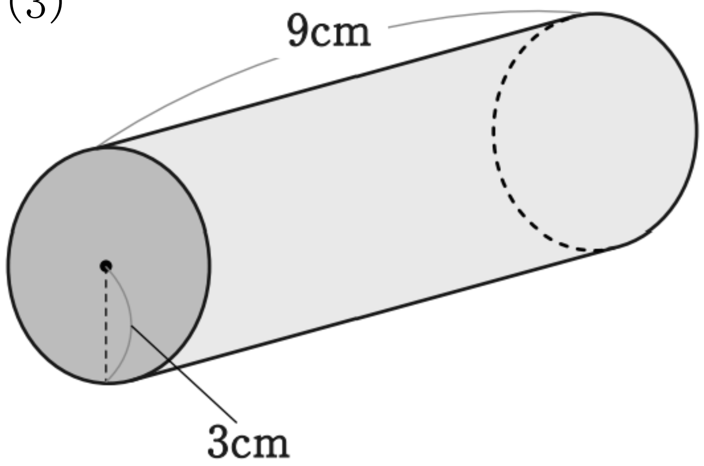
(2)



$V = \pi \times 5^2 \times 6 = 150\pi \text{ cm}^3$

$$\begin{aligned} S &= 2 \times \pi \times 5^2 + 2\pi \times 5 \times 6 \\ &= 2\pi \times 5 \times (5+6) \\ &= 2\pi \times 5 \times 11 \\ &= 110\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

(3)

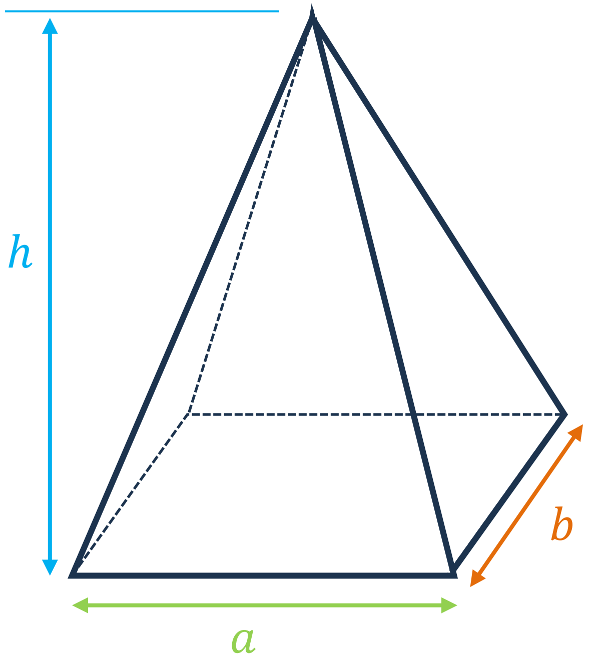


$V = \pi \times 3^2 \times 9 = 81\pi \text{ cm}^3$

$$\begin{aligned} S &= 2 \times \pi \times 3^2 + 2\pi \times 3 \times 9 \\ &= 2\pi \times 3 \times (3+9) \\ &= 2\pi \times 3 \times 12 \\ &= 72\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

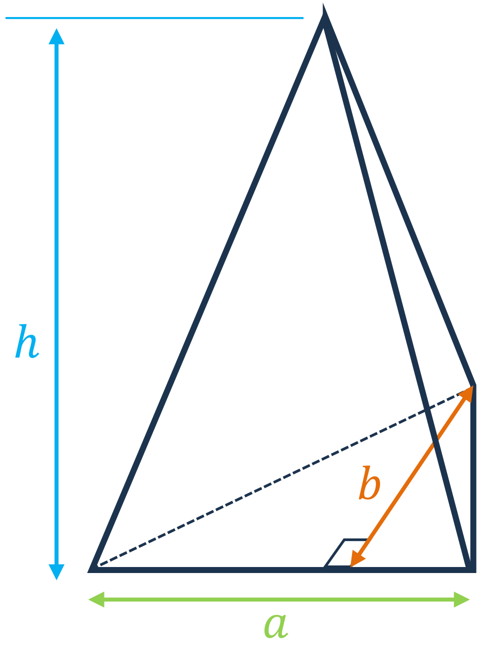
角錐と円錐の体積

四角錐



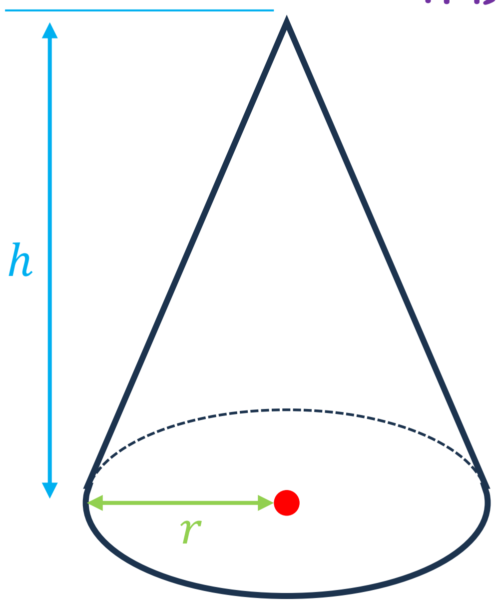
$$V = a \times b \times h \times \frac{1}{3}$$

三角錐



$$V = \frac{a \times b}{2} \times h \times \frac{1}{3}$$

円錐

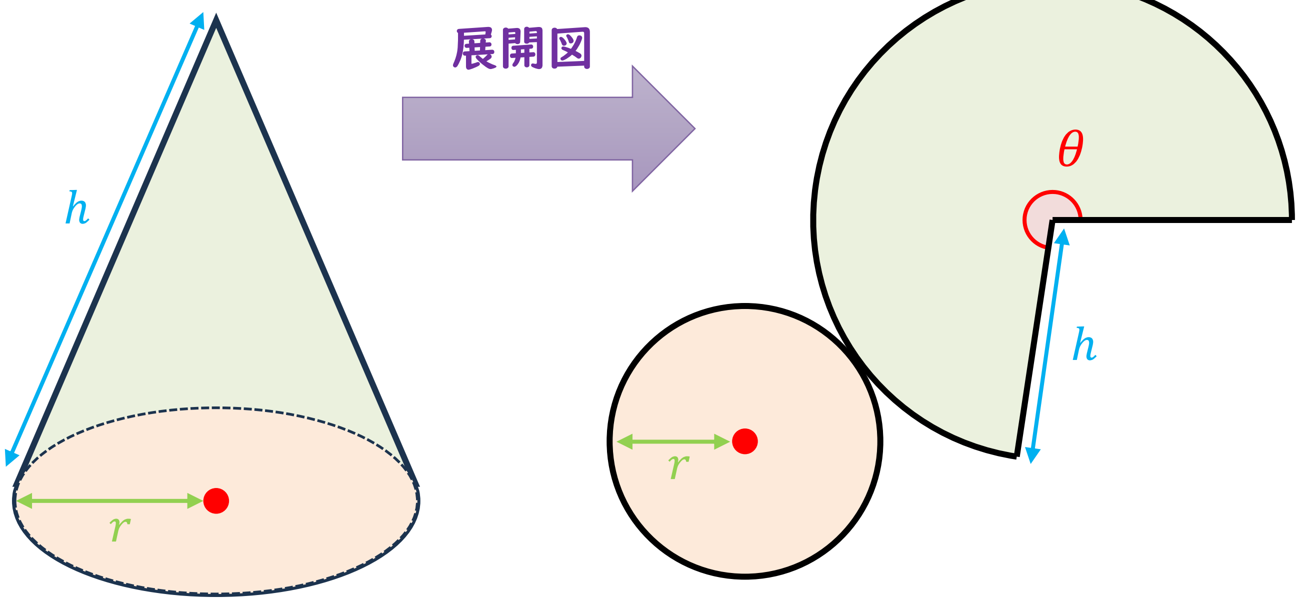


$$V = \pi r^2 \times h \times \frac{1}{3}$$

体積＝底面積×高さ×$\frac{1}{3}$
で求められる

円錐の表面積

円錐



扇形の角度θについて考える

$$h\theta = 2\pi r \ \rightarrow \frac{\theta}{2\pi} = \frac{r}{h}$$

扇形の面積の式を作る

$$S_h = \pi h^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \pi h^2 \times \frac{r}{h} = \pi hr$$

底面積の式を作る

$$S_r = \pi r^2$$

表面積は

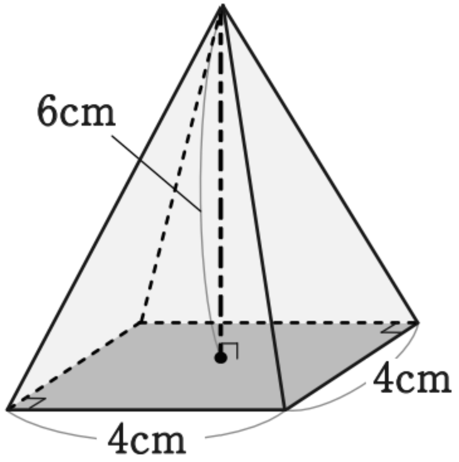
$$S = S_h + S_r = \pi hr + \pi r^2 = \pi(hr + r^2)$$

$$S = \pi(hr + r^2)$$

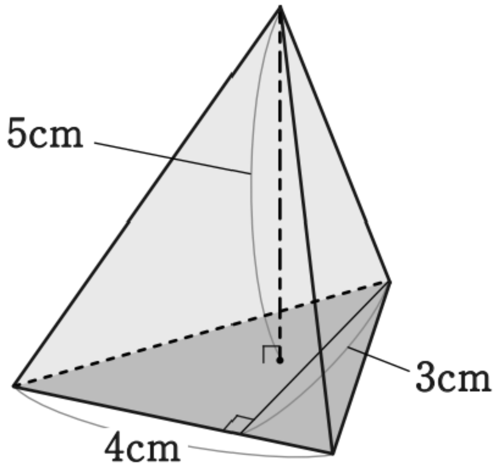
練習問題6

次の立体の体積を求めよ。

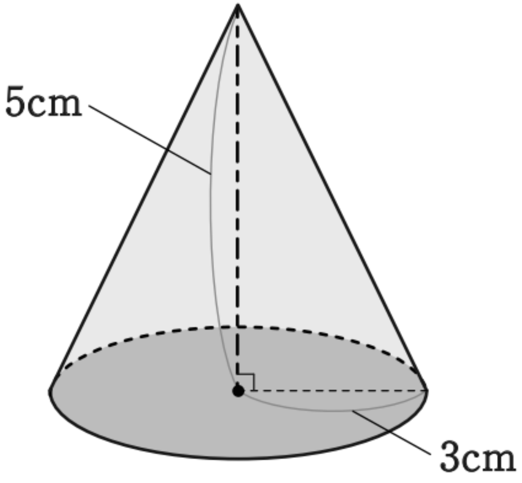
(1)



(2)



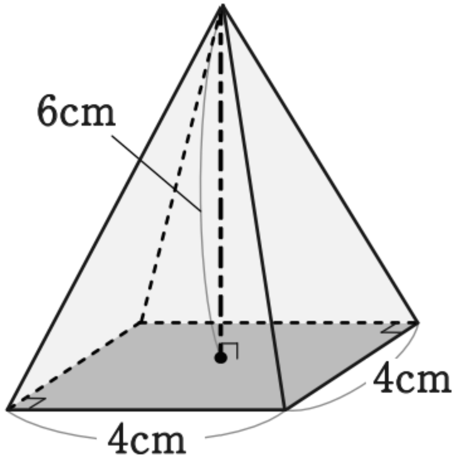
(3)



練習問題6（解答）

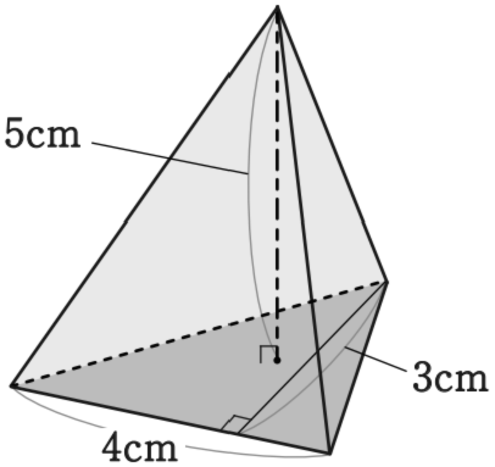
次の立体の体積を求めよ。

(1)



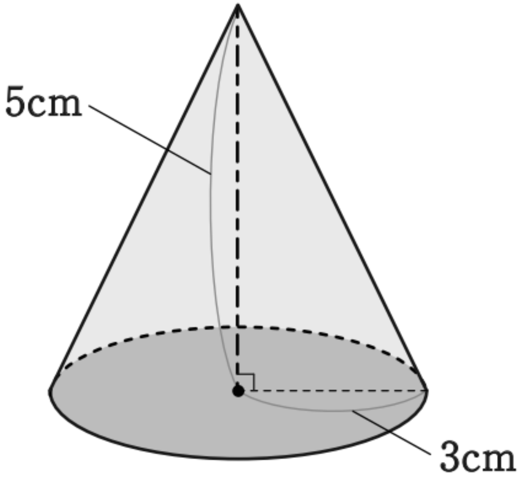
$$V = 4 \times 4 \times 6 \times \frac{1}{3} = 32\ \mathrm{cm}^3$$

(2)



$$V = 4 \times 3 \times \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{1}{3} = 10\ \mathrm{cm}^3$$

(3)

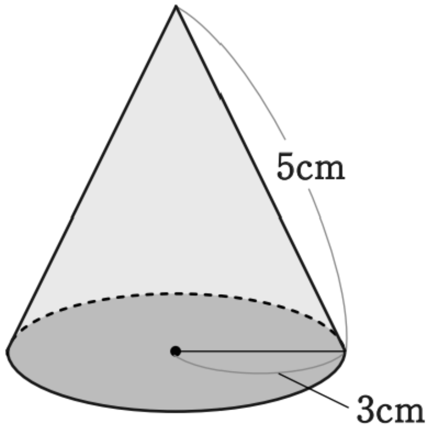


$$V = \pi \times 3^2 \times 5 \times \frac{1}{3} = 15\pi\ \mathrm{cm}^3$$

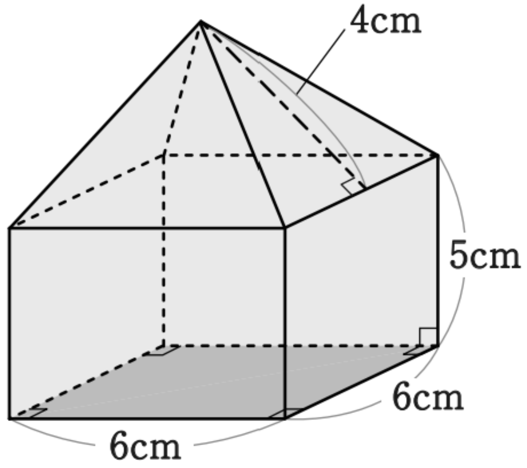
練習問題7

次の立体の表面積を求めよ。

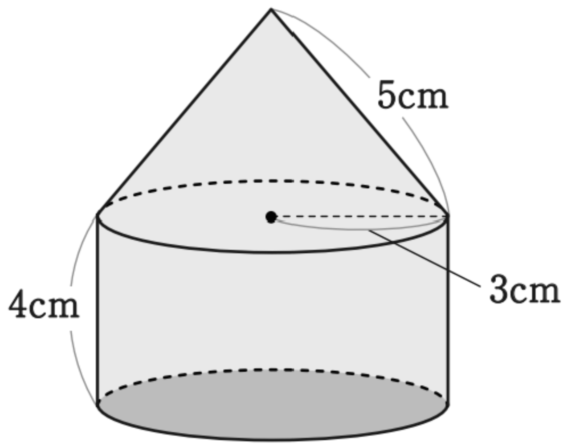
(1)



(2)



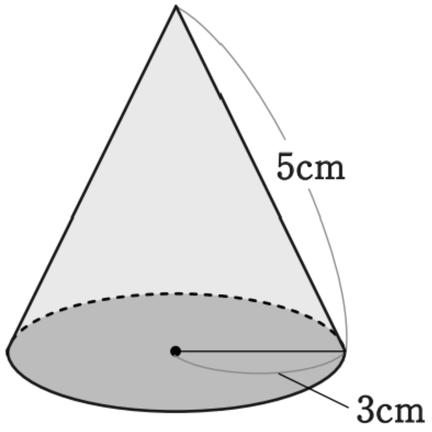
(3)



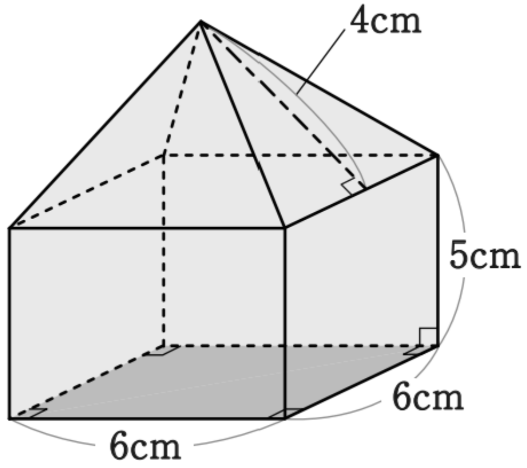
練習問題7（解答）

次の立体の表面積を求めよ。

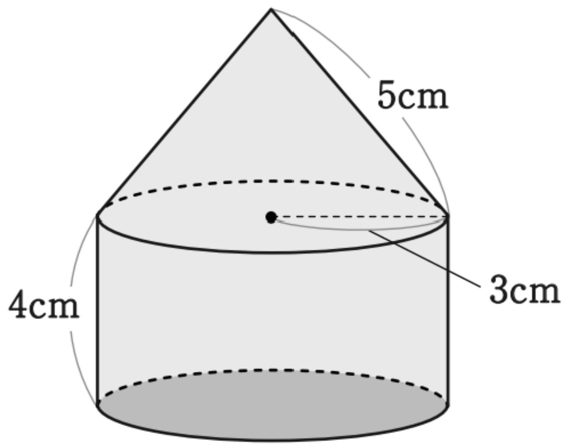
(1)



(2)



(3)



$$S = \pi \times 3^2 + \pi \times 5^2 \times \frac{3}{5}$$
$$= 9\pi + 15\pi$$
$$= 24\pi \text{ cm}^3$$

$$S = 4 \times 5 \times \frac{1}{2} \times 4 + 5 \times 6 \times 4 + 6 \times 6$$
$$= 40 + 120 + 36$$
$$= 196 \text{ cm}^3$$

$$S = \pi \times 3^2 + \pi \times 5^2 \times \frac{3}{5} + 2\pi \times 3 \times 4$$
$$= 9\pi + 15\pi + 24\pi$$
$$= 48\pi \text{ cm}^3$$

ご聴講ありがとうございました!!