電験三種　オンライン講座

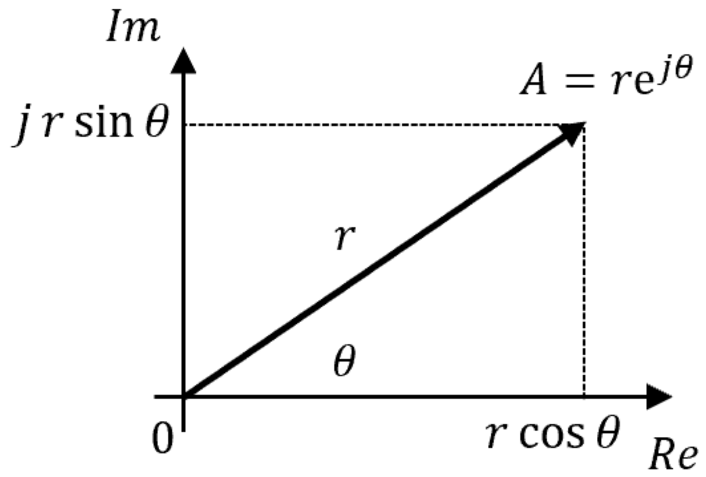
電気数学　第17回
複素数（応用）

2024.08.04 Sun

オイラーの公式と指数関数表示

〇オイラーの公式
絶対値 1の複素数$z=\cos\theta+j\sin\theta$において、偏角θを示す絶対値 1の指数関数$f(\theta)=\mathrm{e}^{j\theta}$が存在し、
この条件件を満たす定数 $\mathrm{e}=2.718\cdots$ はネイピア数と呼ばれる。ネイピア数により以下の関係式が成り立つ。

$$\mathrm{e}^{j\theta}=\cos\theta+j\,\sin\theta$$



オイラーの公式を用いた複素数の表現を指数関数表示という。
$A=r\angle\theta$を指数関数表示で表現すると、

$$A=r\mathrm{e}^{j\theta}$$

複素数表示、フェーザ表示、指数関数表示の関係は以下のようになる。

$$A=r\cos\theta+jr\sin\theta \leftrightarrow A=r\angle\theta \leftrightarrow A=r\mathrm{e}^{j\theta}$$

複素数表示　　フェーザ表示　　指数関数表示

指数法則

$a \neq 0,\ b \neq 0$で$m,\ n$が正の整数のとき、以下の指数法則が成り立つ。

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad \frac{1}{a^n} = a^{-n} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad a^0 = 1 \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

指数関数表示に適用すると、

$$\mathrm{e}^{j\theta_1}\mathrm{e}^{j\theta_2} = \mathrm{e}^{j(\theta_1+\theta_2)} \qquad \frac{\mathrm{e}^{j\theta_1}}{\mathrm{e}^{j\theta_2}} = \mathrm{e}^{j(\theta_1-\theta_2)} \qquad \frac{1}{\mathrm{e}^{j\theta_1}} = \mathrm{e}^{-j\theta_1}$$

$$\left(\mathrm{e}^{j\theta_1}\right)^n = \mathrm{e}^{jn\theta_1} \qquad \frac{1}{(\mathrm{e}^{j\theta_1})^n} = \mathrm{e}^{-jn\theta_1} \qquad \mathrm{e}^{j0} = 1$$

練習問題 I

以下の複素数を指数関数表示で示せ。ここで$z_1 = \mathrm{e}^{j\theta_1}$、$z_2 = \mathrm{e}^{j\theta_2}$とする。

（1） $z_1 z_1$

（2） $z_1 z_1 z_1$

（3） z_1^5

（4） $z_1 z_1 z_2$

（5） $z_1^3 z_2^4$

（6） $\dfrac{z_1}{z_2 z_2}$

（7） $\dfrac{1}{z_1 z_2}$

（8） $\dfrac{1}{z_1^3}$

練習問題１（解答）

以下の複素数を指数関数表示で示せ。ここで$z_1 = \mathrm{e}^{j\theta_1}$、$z_2 = \mathrm{e}^{j\theta_2}$とする。

（１）$z_1 z_1$

$= \mathrm{e}^{j\theta_1} \times \mathrm{e}^{j\theta_1}$

$= \mathrm{e}^{j2\theta_1}$

（２）$z_1 z_1 z_1$

$= \mathrm{e}^{j\theta_1} \times \mathrm{e}^{j\theta_1} \times \mathrm{e}^{j\theta_1}$

$= \mathrm{e}^{j3\theta_1}$

（３）z_1^5

$= \mathrm{e}^{j5\theta_1}$

（４）$z_1 z_1 z_2$

$= \mathrm{e}^{j\theta_1} \times \mathrm{e}^{j\theta_1} \times \mathrm{e}^{j\theta_2}$

$= \mathrm{e}^{j(2\theta_1+\theta_2)}$

（５）$z_1^3 z_2^4$

$= \mathrm{e}^{j(3\theta_1+4\theta_2)}$

（６）$\dfrac{z_1}{z_2 z_2}$

$= \dfrac{\mathrm{e}^{j\theta_1}}{\mathrm{e}^{j\theta_2} \times \mathrm{e}^{j\theta_2}}$

$= \mathrm{e}^{j(\theta_1-2\theta_2)}$

（７）$\dfrac{1}{z_1 z_2}$

$= \dfrac{1}{\mathrm{e}^{j\theta_1} \times \mathrm{e}^{j\theta_2}}$

$= \mathrm{e}^{-j(\theta_1+\theta_2)}$

（８）$\dfrac{1}{z_1^3}$

$= \dfrac{1}{\mathrm{e}^{j3\theta_1}}$

$= \mathrm{e}^{-j3\theta_1}$

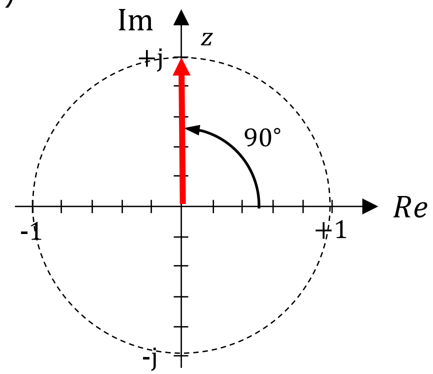
練習問題2

オイラーの公式を用いて、複素数表示と指数関数表示で以下のzを示せ。

オイラーの公式

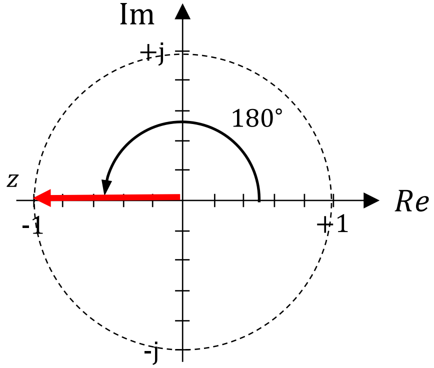
$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$$

（1）



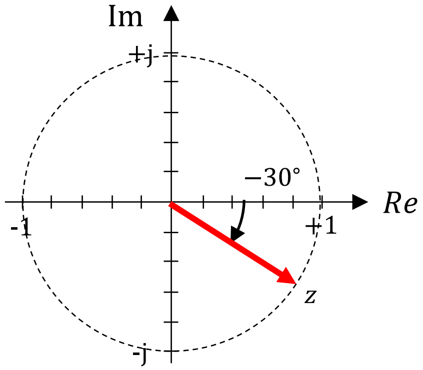
Ans. 複素数表示：　　指数関数表示：

（2）



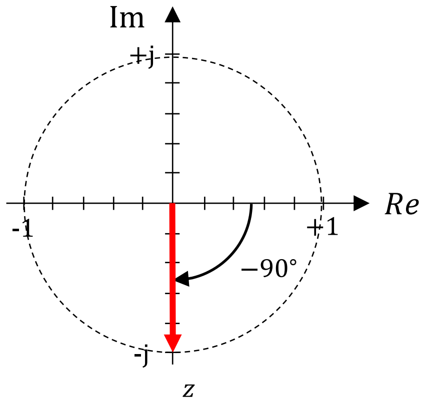
Ans. 複素数表示：　　指数関数表示：

（3）



Ans. 複素数表示：　　指数関数表示：

（4）



Ans. 複素数表示：　　指数関数表示：

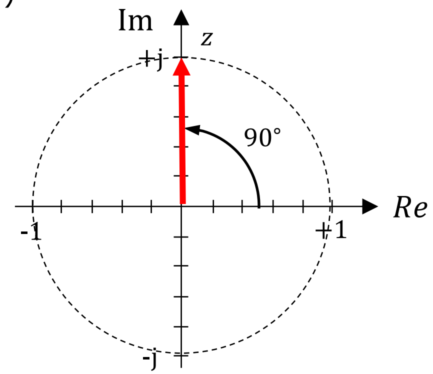
練習問題2（解答）

オイラーの公式を用いて、複素数表示と指数関数表示で以下のzを示せ。

オイラーの公式

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$$

（1）

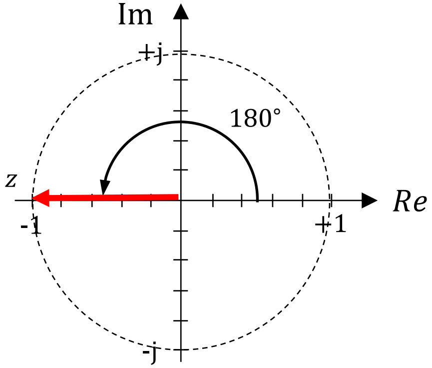


$$z=\cos 90^\circ+j\sin 90^\circ$$
$$=0+j$$

$$z=e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Ans. 複素数表示：$z=j$　　指数関数表示：$z=e^{j\frac{\pi}{2}}$

（2）

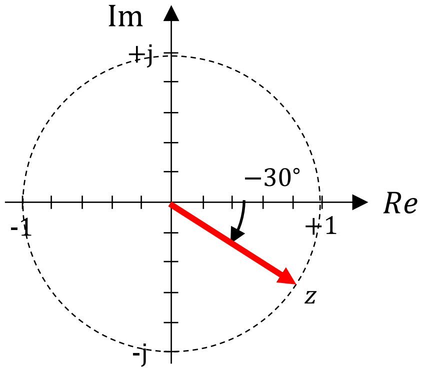


$$z=\cos 180^\circ+j\sin 180^\circ$$
$$=-1+j0$$

$$z=e^{j\pi}$$

Ans. 複素数表示：$z=-1$　　指数関数表示：$z=e^{j\pi}$

（3）

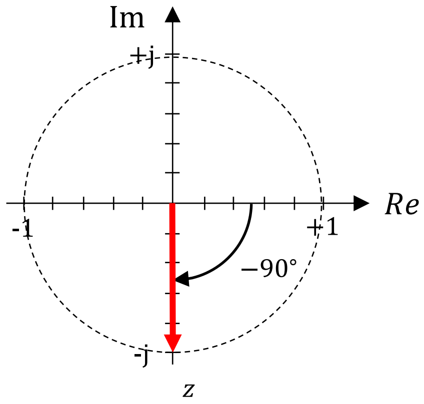


$$z=\cos(-30^\circ)+j\sin(-30^\circ)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-j\frac{1}{2}$$

$$z=e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

Ans. 複素数表示：$z=\frac{\sqrt{3}}{2}-j\frac{1}{2}$　指数関数表示：$z=e^{-j\frac{\pi}{6}}$

（4）



$$z=\cos(-90^\circ)+j\sin(-90^\circ)$$
$$=0-j$$

$$z=e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Ans. 複素数表示：$z=-j$　　指数関数表示：$z=e^{-j\frac{\pi}{2}}$

練習問題3

オイラーの公式
$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

オイラーの公式を用いて、以下の複素数zを簡単な複素数表示に変形せよ。

（1） $z = e^{j\pi/4}$

Ans. $z =$ ______

（2） $z = e^{j\pi/3}$

Ans. $z =$ ______

（3） $z = e^{j\pi/2}$

Ans. $z =$ ______

（4） $z = e^{j\pi}$

Ans. $z =$ ______

（5） $z = e^{-j\pi/6}$

Ans. $z =$ ______

（6） $z = e^{-j\pi/2}$

Ans. $z =$ ______

練習問題３（解答）

オイラーの公式を用いて、以下の複素数zを簡単な複素数表示に変形せよ。

（１） $z = \mathrm{e}^{j\pi/4}$

$$z = \cos\frac{\pi}{4} + j\ \sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ans. $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$

（２） $z = \mathrm{e}^{j\pi/3}$

$$z = \cos\frac{\pi}{3} + j\ \sin\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ans. $z = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

（３） $z = \mathrm{e}^{j\pi/2}$

$$z = \cos\frac{\pi}{2} + j\ \sin\frac{\pi}{2}$$
$$= j$$

Ans. $z = j$

（４） $z = \mathrm{e}^{j\pi}$

$$z = \cos\pi + j\ \sin\pi$$
$$= -1$$

Ans. $z = -1$

（５） $z = \mathrm{e}^{-j\pi/6}$

$$z = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + j\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}$$

Ans. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}$

（６） $z = \mathrm{e}^{-j\pi/2}$

$$z = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -j$$

Ans. $z = -j$

練習問題4

オイラーの公式

$\mathrm{e}^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

オイラーの公式を用いて、以下の複素数zを簡単な複素数表示に変形せよ。

（1） $z = \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}$

Ans. $z =$

（2） $z = \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}}$

Ans. $z =$

（3） $z = \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{6}}$

Ans. $z =$

（4） $z = \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}$

Ans. $z =$

（5） $z = \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{6}}$

Ans. $z =$

（6） $z = \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{2}}$

Ans. $z =$

練習問題4（解答）

オイラーの公式を用いて、以下の複素数zを簡単な複素数表示に変形せよ。

（1）

$$z = e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$z = e^{j\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$= \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}$$

$$= j$$

Ans. $z = j$

（2）

$$z = e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$z = e^{j\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{j\frac{5\pi}{6}}$$

$$= \cos\frac{5\pi}{6} + j\sin\frac{5\pi}{6}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}$$

Ans. $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}$

（3）

$$z = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$z = e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)} = e^{j\frac{4\pi}{6}} = e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$= -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ans. $z = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

（4）

$$z = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$z = e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$= \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ans. $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$

（5）

$$z = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$z = e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)} = e^{j\frac{2\pi}{6}} = e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$= \cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ans. $z = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

（6）

$$z = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$z = e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)} = e^{0}$$

$$= 1$$

Ans. $z = 1$

演習Ⅰ

次の式を満たす実数x、yを求めよ。

（１）　$(5+j3)x+(2-j)y=8+j7$

（２）　$\dfrac{12+jy}{3-j2}=x+j3$

演習Ｉ（解答）

次の式を満たす実数x、yを求めよ。

（１）　$(5+j3)x+(2-j)y=8+j7$

$5x+j3x+2y-jy=8+j7$
$5x+2y+j(3x-y)=8+j7$

$5x+2y=8\ \cdots(1)$
$3x-y=7\ \cdots(2)$

$(1)+2\times(2)$
$11x=22$
$x=2$

$x=2\ \rightarrow(2)$
$3\times2-y=7$
$y=-1$

（２）　$\dfrac{12+jy}{3-j2}=x+j3$

$12+jy=(x+j3)(3-j2)$
$12+jy=3x+j9-j2x+6$
$3x-j2x-jy=-6+12-j9$

$3x+j(-2x-y)=6-j9$

$3x=6\ \cdots(1)$
$-2x-y=-9\ \cdots(2)$

$3x=6$
$x=2$

$x=2\ \rightarrow(2)$
$-2\times2-y=-9$
$y=5$

演習2

複素数$z = 1 + j$、$w = -\frac{1}{\sqrt{3}} + j\frac{1}{3}$について以下の問に答えよ。

（1） $\left|\frac{w}{z}\right|$

（2） $\frac{w}{z}$の偏角$\theta\ (0 \leq \theta < 2\pi)$

演習２（解答）

複素数$z=1+j$、$w=-\frac{1}{\sqrt{3}}+j\frac{1}{3}$について以下の問に答えよ。

（１）$\left|\frac{w}{z}\right|$

$$|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

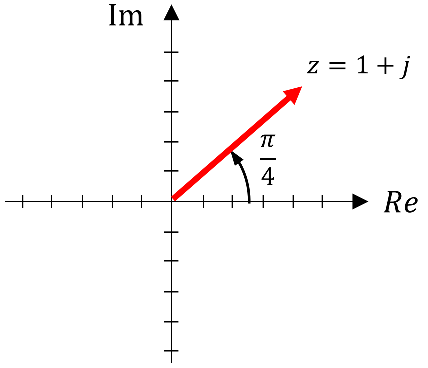
$$|w|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}$$

$$=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

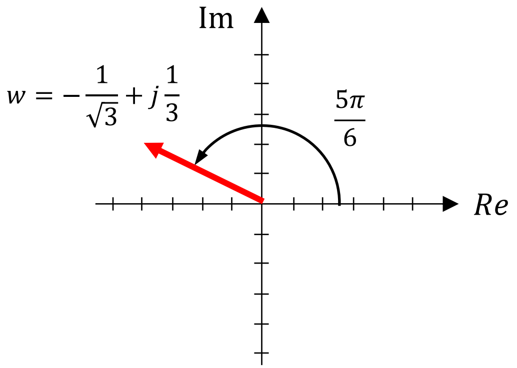
$$\left|\frac{w}{z}\right|=\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

（２）$\frac{w}{z}$の偏角$\theta\ (0\le\theta<2\pi)$

$$z=1+j=\sqrt{2}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}$$



$$w=-\frac{1}{\sqrt{3}}+j\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{j\frac{5\pi}{6}}$$



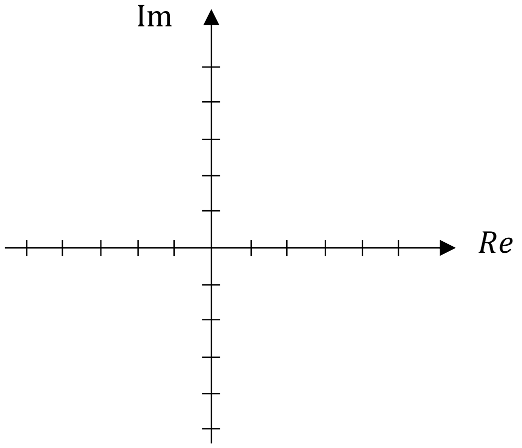
$$\frac{w}{z}=\frac{\frac{2}{3}\mathrm{e}^{j\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}}=\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{e}^{j\frac{5\pi}{6}-j\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{e}^{j\frac{7\pi}{12}}$$

$$\theta=\frac{7\pi}{12}$$

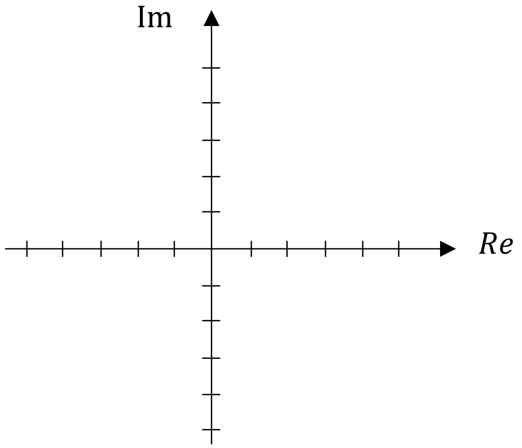
演習3

複素平面上の2点$z_1 = 1 + j2$、$z_2 = 2 - j2$ について以下の問に答えよ。

（1） 2点z_1、z_2間の距離



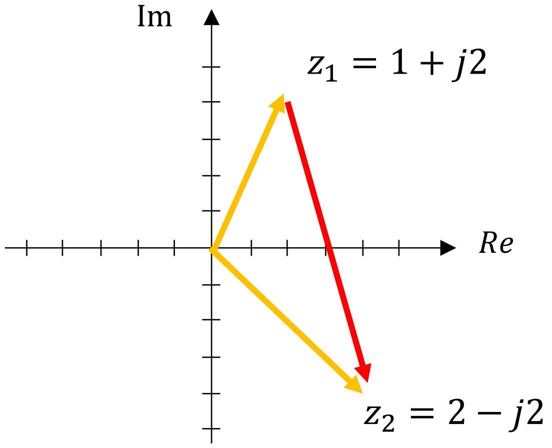
（2） 線分$z_1 z_2$を2：1の比に内分する点z_3



演習３（解答）

複素平面上の2点$z_1 = 1 + j2$ 、$z_2 = 2 - j2$ について以下の問に答えよ。

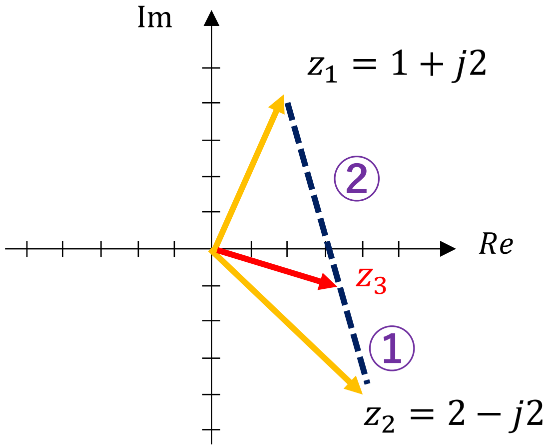
（１） 2点z_1、z_2間の距離



$$z_2 - z_1 = (2 - j2) - (1 + j2) = 1 - j4$$

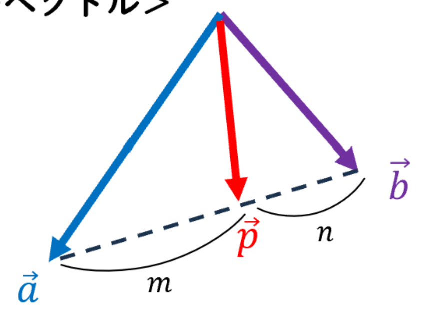
$$|z_2 - z_1| = \sqrt{1 + 4^2} = \sqrt{17}$$

（２） 線分$z_1 z_2$を2：1の比に内分する点z_3



$$z_3 = \frac{1 \times z_1 + 2 \times z_2}{2 + 1} = \frac{1 + j2 + 2(2 - j2)}{3} = \frac{1 + j2 + 4 - j4}{3} = \frac{5}{3} - j\frac{2}{3}$$

＜内分点のベクトル＞



$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}$$

演習4

（1） $\dfrac{j4}{1+j\sqrt{3}}$ の偏角 $\theta\ (0 \leq \theta < 2\pi)$ を求めよ

（2） $\left(\dfrac{j4}{1+j\sqrt{3}}\right)^8$ を複素数表示 $a+jb$ で示せ

演習4（解答）

（1） $\dfrac{j4}{1+j\sqrt{3}}$ の偏角$\theta\ (0 \le \theta < 2\pi)$を求めよ

$$j4 = 4e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$1+j\sqrt{3} = 2e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{j4}{1+j\sqrt{3}} = \frac{4e^{j\frac{\pi}{2}}}{2e^{j\frac{\pi}{3}}} = 2e^{j\frac{\pi}{2}-j\frac{\pi}{3}} = 2e^{j\frac{\pi}{6}}$$

（2） $\left(\dfrac{j4}{1+j\sqrt{3}}\right)^8$ を複素数表示$a+jb$で示せ

$$\left(\frac{j4}{1+j\sqrt{3}}\right)^8 = 2^8\left(e^{j\frac{\pi}{6}}\right)^8 = 2^8 e^{j\frac{8\pi}{6}} = 256e^{j\frac{4\pi}{3}}$$

$$= 256\left(\cos\frac{4\pi}{3} + j\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 256\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -128 - j128\sqrt{3}$$

ご聴講ありがとうございました!!