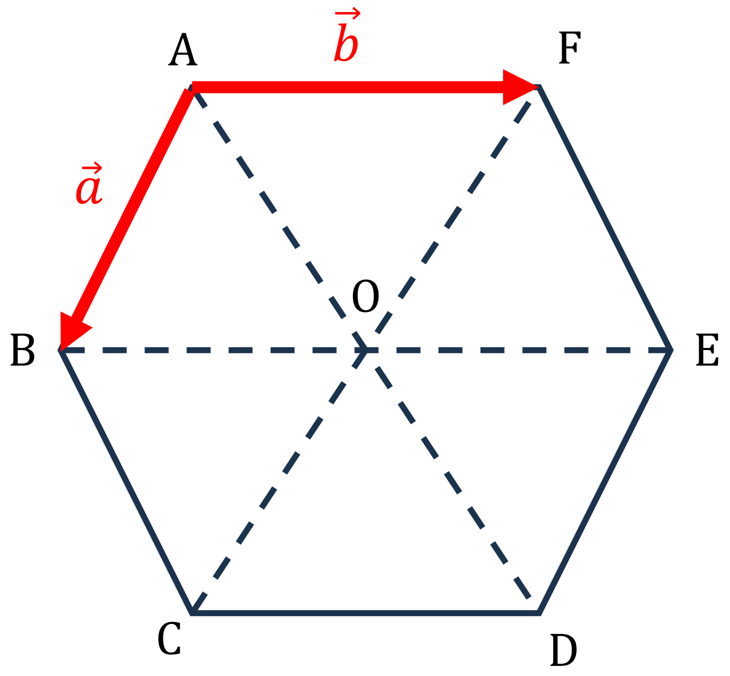
電験三種　オンライン講座

電気数学　第15回
ベクトル（応用）

2024.07.21 Sun

演習Ⅰ

Oを中心とする一辺の長さが1の正六角形ABCDEFに対して
$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$、$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}$とおくとき、次の問に答えよ。



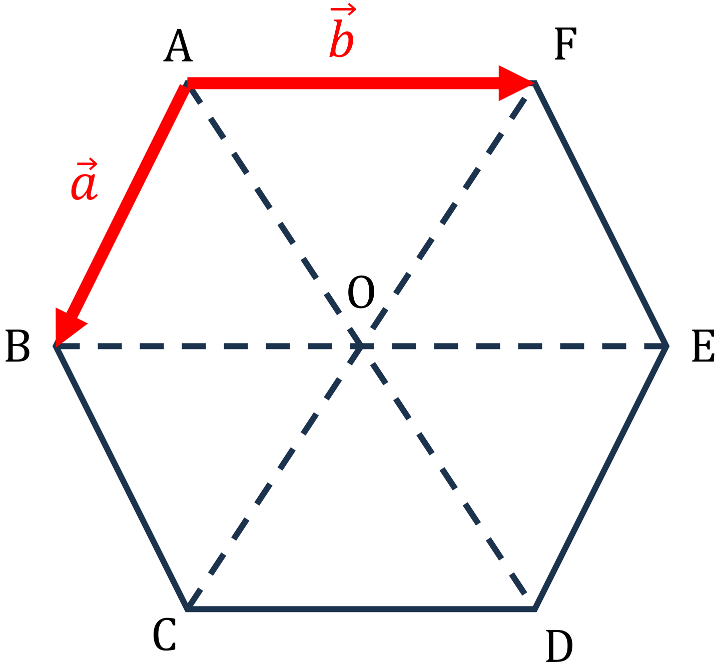
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$を$\vec{a}$、$\vec{b}$で表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$を$\vec{a}$、$\vec{b}$で表せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CE}}$を$\vec{a}$ 、 $\vec{b}$で 表せ。

演習１（解答）

Oを中心とする一辺の長さが1の正六角形ABCDEFに対して
$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$、$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}$とおくとき、次の問に答えよ。



（1）　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$を$\vec{a}$、$\vec{b}$で表せ。

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{a}=2\vec{a}+\vec{b}$$

（2）　$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$を$\vec{a}$、$\vec{b}$で表せ。

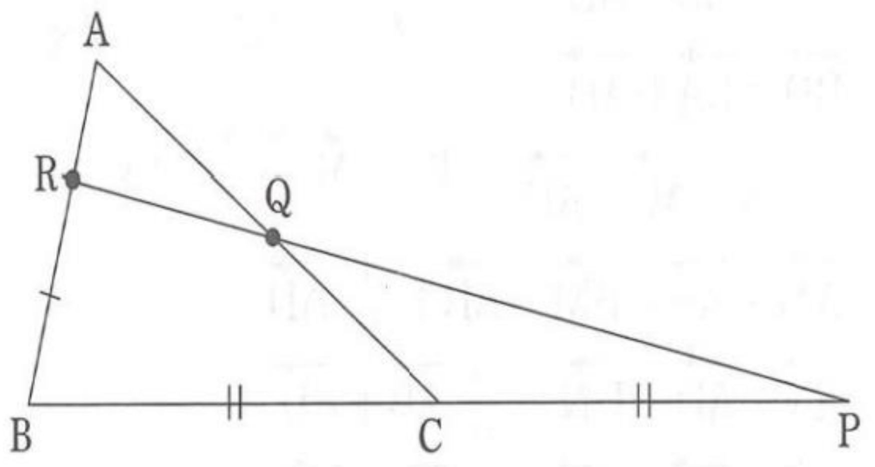
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{b}+\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+2\vec{b}$$

（3）　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CE}}$を$\vec{a}$、$\vec{b}$で 表せ。

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{a}+2\vec{b}$$

演習2

三角形ABCに対して$\vec{b}=\overrightarrow{AB}$、$\vec{c}=\overrightarrow{AC}$とおく。
$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$を満たす点P、Q、Rをとるとき、次の問に答えよ。



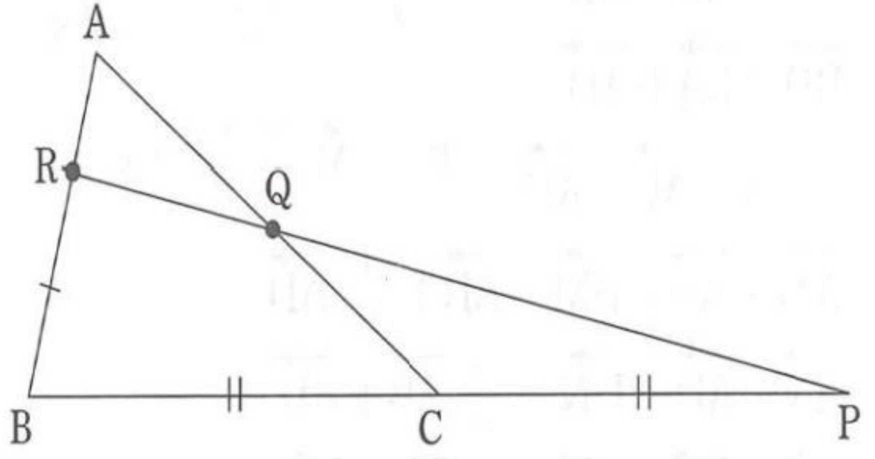
(1)　$\overrightarrow{RQ}$を$\vec{b}$、$\vec{c}$で表せ。

(2)　$\overrightarrow{RP}$を$\vec{b}$、$\vec{c}$で表せ。

(3)　3点P、Q、Rが同一直線上にあることを証明せよ。

演習2（解答）

三角形ABCに対して$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$、$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$とおく。
$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$、$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$、$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$を満たす点P、Q、Rをとるとき、次の問に答えよ。



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$を$\vec{b}$、$\vec{c}$で表せ。

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{b}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{RP}}$を$\vec{b}$、$\vec{c}$で表せ。

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\overrightarrow{\mathrm{RB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\vec{b}+(\vec{c}-\vec{b})+=(\vec{c}-\vec{b})=\frac{2}{3}\vec{b}+2\vec{c}-2\vec{b}=2\vec{c}-\frac{4}{3}\vec{b}$$

(3)　3点P、Q、Rが同一直線上にあることを証明せよ。

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=2\vec{c}-\frac{4}{3}\vec{b}=4\left(\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{b}\right)=4\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$$

→2つのベクトルが同じ向きであることから
3点P、Q、Rは同一直線上にある。

演習3

(1)　$\vec{a}=(2,3)$、$\vec{b}=(3,-2)$に対して、$\vec{c}=(5,2)$を$\vec{a}$、$\vec{b}$の一次結合で表せ。
ここで一次結合とは、$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$という形で表すことで、実数$m,n$を導出して$\vec{c}$の式を作ることである。

(2)　$\vec{a}=(2,-1)$、$\vec{b}=(5,3)$に対して、$\vec{c}=(-4,-9)$を$\vec{a}$、$\vec{b}$の一次結合で表せ。

(3)　$\vec{a}=(2,-1)$、$\vec{b}=(5,3)$に対して、$\vec{c}=(13,-1)$を$\vec{a}$、$\vec{b}$の一次結合で表せ。

演習３（解答）

（1）　$\vec{a}=(2,3)$、$\vec{b}=(3,-2)$に対して、$\vec{c}=(5,2)$を$\vec{a}$、$\vec{b}$の一次結合で表せ。
ここで一次結合とは、$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$という形で表すことで、実数$m,n$を導出して$\vec{c}$の式を作ることである。

$(5,2)=(2m,3m)+(3n,-2n)=(2m+3n,3m-2n)$

$5=2m+3n$

$2=3m-2n$

$$\begin{array}{rl} & 10=4m+6n \\ +) & 6=9m-6n \\ \hline & 16=13m \end{array}$$

$m=\dfrac{16}{13}$

$2=3m-2n\ \rightarrow n=\dfrac{3}{2}m-1$

$n=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{16}{13}-1=\dfrac{11}{13}$

$\vec{c}=\dfrac{16}{13}\vec{a}+\dfrac{11}{13}\vec{b}$

（2）　$\vec{a}=(2,-1)$、$\vec{b}=(5,3)$に対して、$\vec{c}=(-4,-9)$を$\vec{a}$、$\vec{b}$の一次結合で表せ。

$-4=2m+5n$

$-9=-m+3n$

$$\begin{array}{rl} & -4=2m+5n \\ +) & -18=-2m+6n \\ \hline & -22=\quad 11n \end{array}$$

$n=-2$

$-9=-m+3n\rightarrow m=3n+9$

$m=3\times(-2)+9=3$

$\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$

（3）　$\vec{a}=(2,-1)$、$\vec{b}=(5,3)$に対して、$\vec{c}=(13,-1)$を$\vec{a}$、$\vec{b}$の一次結合で表せ。

$13=2m+5n$

$-1=-m+3n$

$$\begin{array}{rl} & 13=2m+5n \\ +) & -2=-2m+6n \\ \hline & 11=\quad 11n \end{array}$$

$n=1$

$-1=-m+3n\rightarrow m=3n+1$

$m=3\times(1)+1=4$

$\vec{c}=4\vec{a}+\vec{b}$

演習4

２点$\mathrm{A}(-1,3)$、$\mathrm{B}(4,2)$について、次のベクトルの成分表示を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$を表すベクトル

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と同じ向きの単位ベクトル
※単位ベクトルとは大きさが１のベクトル

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と逆向きで大きさ3のベクトル

２点$\mathrm{A}(3,1)$、$\mathrm{B}(1,-3)$について、次のベクトルの成分表示を求めよ。

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$を表すベクトル

(5)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と同じ向きの単位ベクトル
※単位ベクトルとは大きさが１のベクトル

(6)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と逆向きで大きさ5のベクトル

演習４（解答）

２点$\mathrm{A}(-1,3)$、$\mathrm{B}(4,2)$について、次のベクトルの成分表示を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$を表すベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4-(-1), 2-3)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (5, -1)$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と同じ向きの単位ベクトル
※単位ベクトルとは大きさが１のベクトル

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{5^2+(-1)^2} = \sqrt{26}$$
$$\vec{e} = \left(\frac{5}{\sqrt{26}}, -\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と逆向きで大きさ3のベクトル

$$\vec{p} = -3\left(\frac{5}{\sqrt{26}}, -\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$$
$$\vec{p} = \left(\frac{-15}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}\right)$$

２点$\mathrm{A}(3,1)$、$\mathrm{B}(1,-3)$について、次のベクトルの成分表示を求めよ。

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$を表すベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1-3, -3-1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2, -4)$$

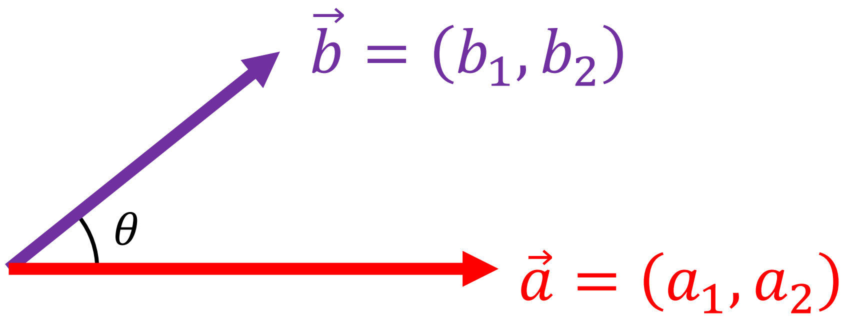
(5)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と同じ向きの単位ベクトル
※単位ベクトルとは大きさが１のベクトル

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(-2)^2+(-4)^2} = 2\sqrt{5}$$
$$\vec{e} = \left(\frac{-2}{2\sqrt{5}}, \frac{-4}{2\sqrt{5}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

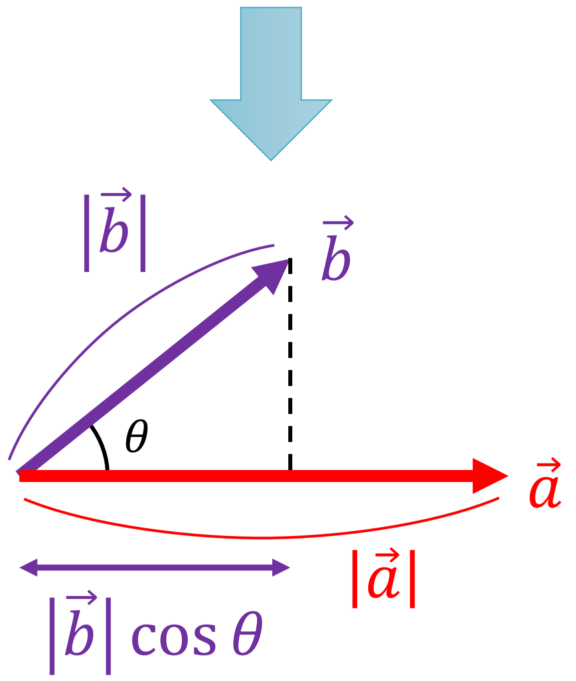
(6)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と逆向きで大きさ5のベクトル

$$\vec{p} = -5\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$
$$\vec{p} = (\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$$

内積



内積はベクトル$\vec{b}$の真上から光をあてて、
ベクトル$\vec{a}$上に見える影のようなものを考えるイメージ



内積の公式

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

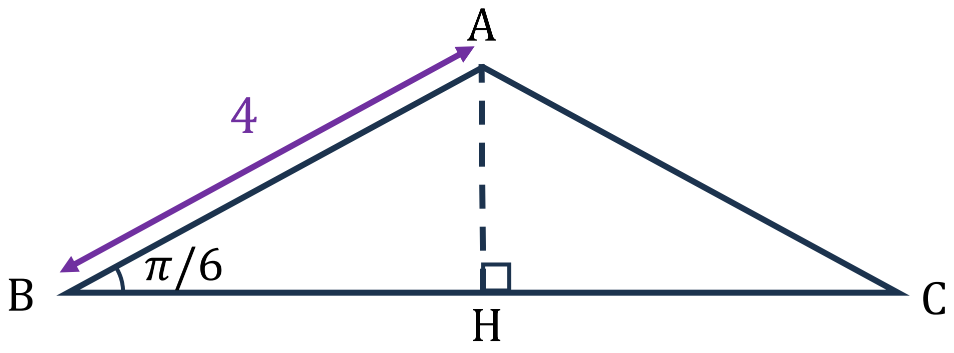
2つのベクトルが平行のとき内積は最大
2つのベクトルが直交のとき内積は0

演習5

図の$AB = AC$**である二等辺三角形**ABC**に対して、次の内積を求めよ。**

（1） $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$　　（2） $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

（3） $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$　　（4） $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$



$\vec{a}$、$\vec{b}$**の成分が次のように与えられるとき、内積**$\vec{a} \cdot \vec{b}$**を求めよ。**

（5） $\vec{a} = (1, -3), \vec{b} = (2,3)$　　（6） $\vec{a} = (3, -1), \vec{b} = (1,3)$　　（7） $\vec{a} = (2,5), \vec{b} = (-2,3)$

演習５（解答）

図の$AB=AC$である二等辺三角形ABCに対して、次の内積を求めよ。

（1）　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$4\cdot 4\cdot\cos 120°$

$=16\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-8$

（2）　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$

$4\cdot 2\cdot\cos 60°$

$=8\times\left(\dfrac{1}{2}\right)=4$

（3）　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$

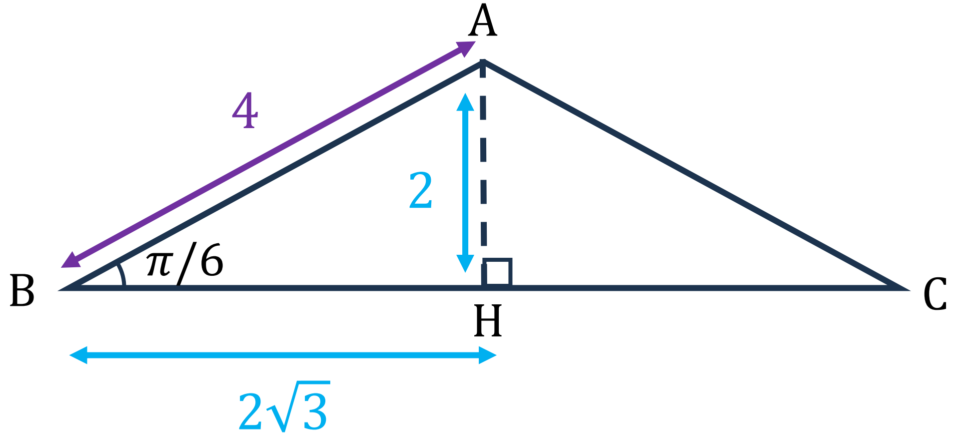
$4\cdot 4\cdot\cos 60°$

$=16\times\left(\dfrac{1}{2}\right)=8$

（4）　$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$

$4\sqrt{3}\cdot 4\cdot\cos 150°$

$=16\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-24$



$\vec{a}$、$\vec{b}$の成分が次のように与えられるとき、内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を求めよ。

（5）　$\vec{a}=(1,-3),\vec{b}=(2,3)$

$1\times 2+(-3)\times 3=2-9$
$=-7$

（6）　$\vec{a}=(3,-1),\vec{b}=(1,3)$

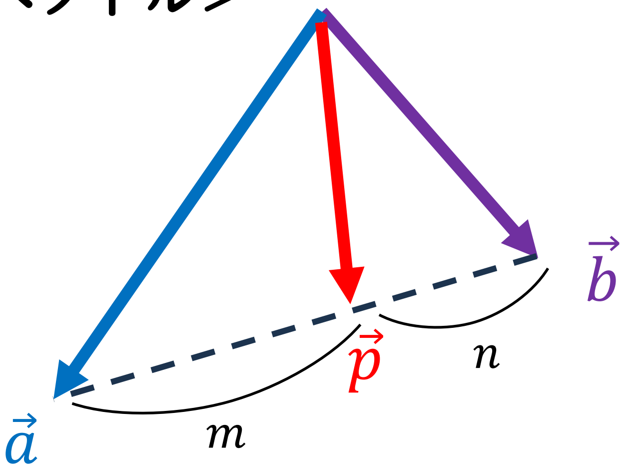
$3\times 1+(-1)\times 3=3-3$
$=0$

（7）　$\vec{a}=(2,5),\vec{b}=(-2,3)$

$2\times(-2)+5\times 3=-4+15$
$=11$

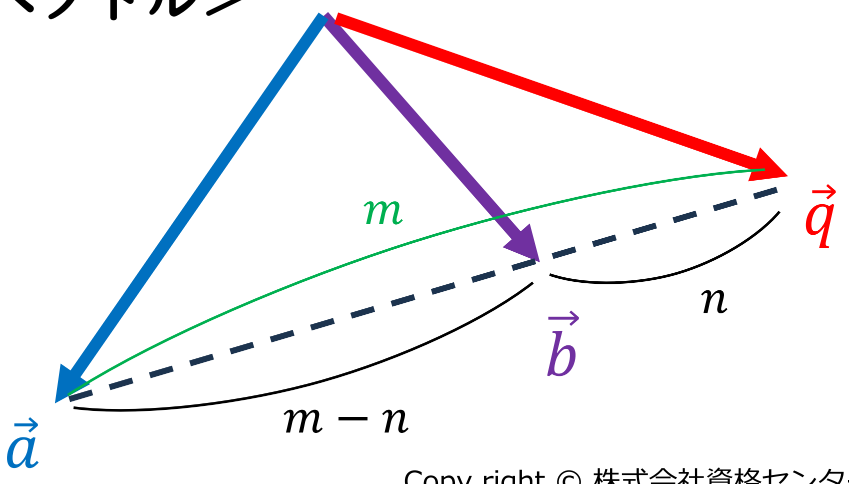
内分点と外分点のベクトル

＜内分点のベクトル＞



$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$$

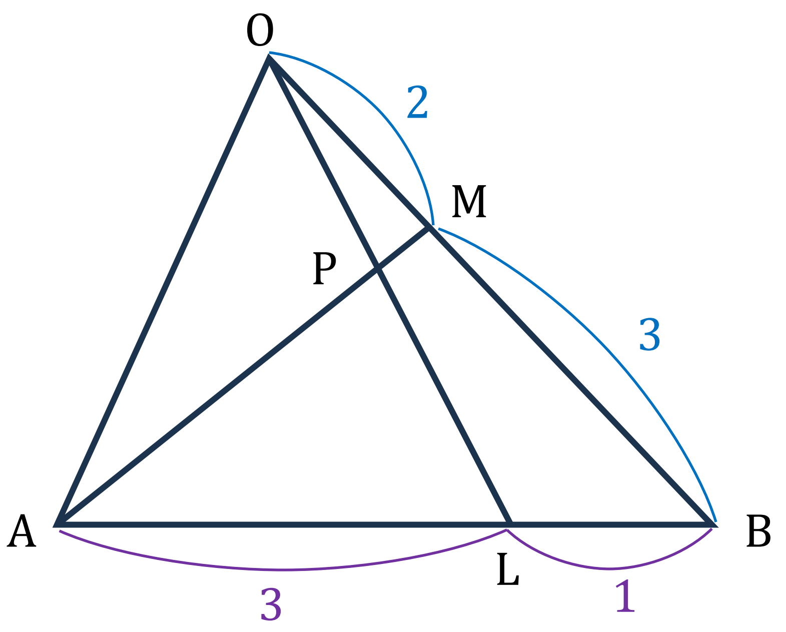
＜外分点のベクトル＞



$$\vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

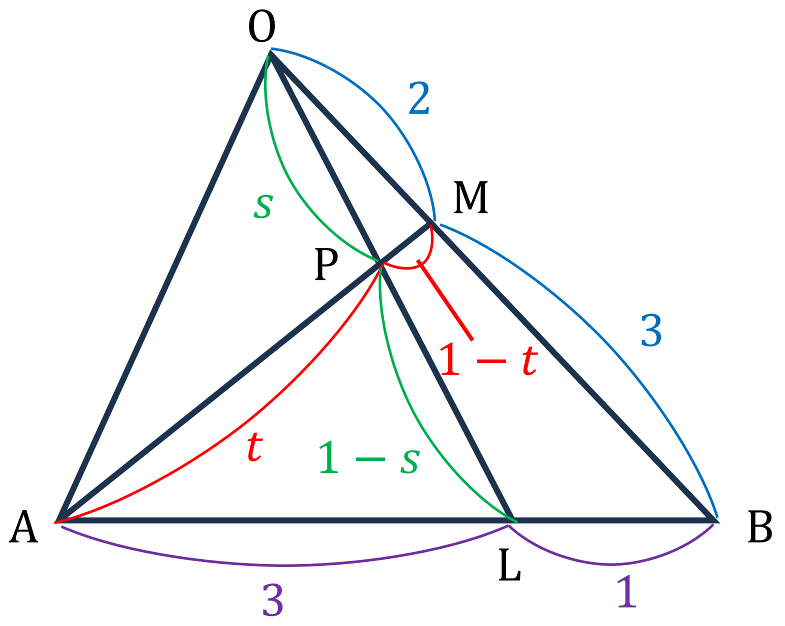
演習6

三角形OABにおいて、辺ABを3: 1に内分する点をL、
辺OBを2: 3に内分する点をMとし、線分OLと線分AMの交点をPとする。
このとき、OP: PLを求めよ。



演習6

三角形OABにおいて、辺ABを3: 1に内分する点をL、
辺OBを2: 3に内分する点をMとし、線分OLと線分AMの交点をPとする。
このとき、OP: PLを求めよ。



$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$、$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$**とおく。**

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} =$

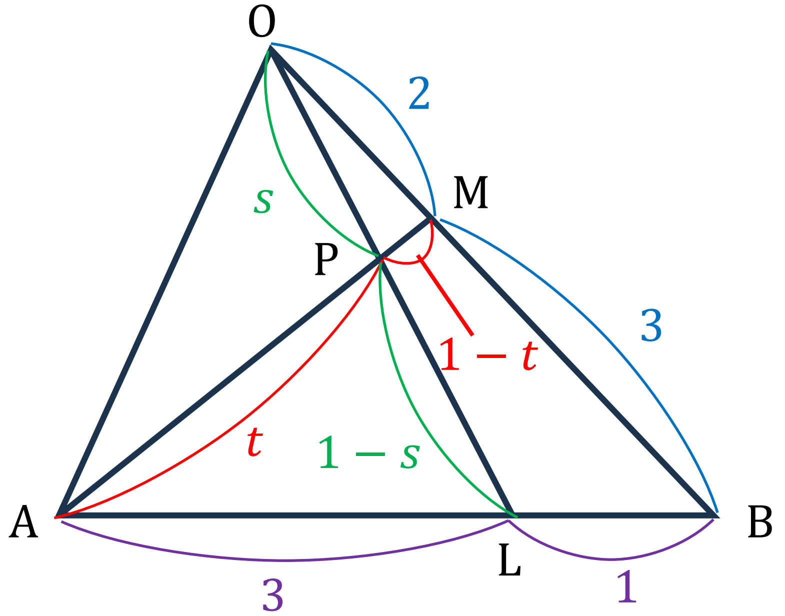
$\overrightarrow{\mathrm{OL}} =$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OL}} =$

$$\boxed{\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}}$$

演習６（解答）

三角形OABにおいて、辺ABを3: 1に内分する点をL、
辺OBを2: 3に内分する点をMとし、線分OLと線分AMの交点をPとする。
このとき、OP: PLを求めよ。



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$**とおく。**

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(1-t)\vec{a}+t\frac{2}{5}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OL}}=s\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}\right)=\frac{1}{4}s\vec{a}+\frac{3}{4}s\vec{b}$$

$$(1-t)\vec{a}+t\frac{2}{5}\vec{b}=\frac{1}{4}s\vec{a}+\frac{3}{4}s\vec{b}$$

$$1-t=\frac{1}{4}s \qquad \frac{2}{5}t=\frac{3}{4}s \qquad \frac{8}{15}t=s$$

$$1-t=\frac{1}{4}\times\frac{8}{15}t \qquad 1=t+\frac{2}{15}t=\frac{17}{15}t$$

$$t=\frac{15}{17} \qquad s=\frac{8}{17}$$

$$\mathrm{OP}:\mathrm{PL}=s:1-s$$
$$=\frac{8}{17}:1-\frac{8}{17}=8:9$$

ご聴講ありがとうございました!!