電験三種　オンライン講座

電気数学　第13回
指数関数と対数関数

2024.07.07 Sun

指数法則

$a \neq 0,\ b \neq 0$で$m,\ n$が正の整数のとき、以下の指数法則が成り立つ。

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad \frac{1}{a^n} = a^{-n} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad a^0 = 1 \qquad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

a^m 指数

底（てい）

$$8 \times 4 = 32 \ \rightarrow 2^3 \times 2^2 = 2^5 = 2^{3+2}$$

$$4^3 = 64 \ \rightarrow (2^2)^3 = 2^6$$

$$\rightarrow \ (2^2)^3 = 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 2^{2+2+2} = 2^{2\times 3}$$

$$\frac{8}{4} = 2 \ \rightarrow \frac{2^3}{2^2} = 2^1 = 2^{3-2}$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \ \rightarrow 2^x \times 2^x = 2^1$$

$$\rightarrow 2^{x+x} = 2^1 \ \rightarrow 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2^1$$

$$\rightarrow \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

演習Ⅰ

以下の計算について、空欄を埋めよ。

（1）　4×16
$=2^{(\ )}\times2^{(\ )}$
$=2^{(\ )+(\ )}$
$=2^{(\ )}$
$=\boxed{\quad}$

（2）　27×9
$=3^{(\ )}\times3^{(\ )}$
$=3^{(\ )+(\ )}$
$=3^{(\ )}$
$=\boxed{\quad}$

（3）　6×9
$=2\times3^{(\ )}\times3^{(\ )}$
$=2\times3^{(\ )+(\ )}$
$=2\times3^{(\ )}$
$=\boxed{\quad}$

（4）　6×32
$=3\times2^{(\ )}\times2^{(\ )}$
$=3\times2^{(\ )+(\ )}$
$=3\times2^{(\ )}$
$=\boxed{\quad}$

（5）　$64\div8$
$=2^{(\ )}\div2^{(\ )}$
$=2^{(\ )-(\ )}$
$=2^{(\ )}$
$=\boxed{\quad}$

（6）　$81\div27$
$=3^{(\ )}\div3^{(\ )}$
$=3^{(\ )-(\ )}$
$=3^{(\ )}$
$=\boxed{\quad}$

（7）　$162\div9$
$=2\times3^{(\ )}\div3^{(\ )}$
$=2\times3^{(\ )-(\ )}$
$=2\times3^{(\ )}$
$=\boxed{\quad}$

（8）　$18\div27$
$=2\times3^{(\ )}\div3^{(\ )}$
$=2\times3^{(\ )-(\ )}$
$=2\times3^{(\ )}$
$=\boxed{\quad}$

演習Ⅰ（解答）

以下の計算について、空欄を埋めよ。

（1）4×16

$= 2^2 \times 2^4$

$= 2^{(2)+(4)}$

$= 2^6$

$= 64$

（2）27×9

$= 3^3 \times 3^2$

$= 3^{(3)+(2)}$

$= 3^5$

$=$ 243

（3）6×9

$= 2 \times 3^1 \times 3^2$

$= 2 \times 3^{(1)+(2)}$

$= 2 \times 3^3$

$=$ 54

（4）6×32

$= 3 \times 2^1 \times 2^5$

$= 3 \times 2^{(1)+(5)}$

$= 3 \times 2^6$

$=$ 192

（5）$64 \div 8$

$= 2^6 \div 2^3$

$= 2^{(6)-(3)}$

$= 2^3$

$=$ 8

（6）$81 \div 27$

$= 3^4 \div 3^3$

$= 3^{(4)-(3)}$

$= 3^1$

$=$ 3

（7）$162 \div 9$

$= 2 \times 3^4 \div 3^2$

$= 2 \times 3^{(4)-(2)}$

$= 2 \times 3^2$

$=$ 18

（8）$18 \div 27$

$= 2 \times 3^2 \div 3^3$

$= 2 \times 3^{(2)-(3)}$

$= 2 \times 3^{-1}$

$=$ 2/3

演習2

次の計算を行え（解答はa^mの形でよい）

(1) $3^2 \times 3^{-3} \div 3^{-4}$

(2) $5^3 \times (5^{-1})^2 \div 5$

(3) $(3^2)^{-3} \times 3^3 \div 9^{-2}$

(4) $(3^2 \times 5^{-1})^2$

(5) $5^3 \times (5^{-1})^2 \div 5$

(6) $(5^2 \times 3^{-1})^3 \times (5^{-3})^2$

演習2（解答）

次の計算を行え（解答はa^mの形でよい）

(1) $3^2 \times 3^{-3} \div 3^{-4}$

$= 3^{2-3-(-4)} = 3^3$

(2) $5^3 \times (5^{-1})^2 \div 5$

$= 5^{3+(-1)\times 2-1}$
$= 5^{3-2-1} = 5^0 = 1$

(3) $(3^2)^{-3} \times 3^3 \div 9^{-2}$

$= 3^{2\times(-3)} \times 3^3 \div (3^2)^{-2}$
$= 3^{2\times(-3)+3-\{2\times(-2)\}}$
$= 3^{-6+3+4} = 3^1 = 3$

(4) $(3^2 \times 5^{-1})^2$

$= 3^2 \times 5^{-1} \times 3^2 \times 5^{-1}$
$= 3^{2\times 2} \times 5^{-1\times 2}$
$= 3^4 \times 5^{-2}$
$= \dfrac{3^4}{5^2}$

(5) $5^3 \times (5^{-1})^2 \div 5$

$= 5^3 \times 5^{-1\times 2} \times 5^{-1}$
$= 5^{3-2-1} = 5^0 = 1$

(6) $(5^2 \times 3^{-1})^3 \times (5^{-3})^2$

$= 5^{2\times 3} \times 3^{-1\times 3} \times 5^{-3\times 2}$
$= 5^6 \times 3^{-3} \times 5^{-6} = 5^{6-6} \times 3^{-3}$
$= 3^{-3} = \dfrac{1}{3^3}$

演習３

次の計算を行え（解答はa^mの形でよい）

(1) $9^{\frac{3}{2}}$

(2) $8^{-\frac{4}{3}}$

(3) $0.04^{1.5}$

(4) $2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{6}} \div 2^{\frac{1}{3}}$

(5) $\left(9^{\frac{2}{3}} \times 3^{-2}\right)^{\frac{3}{2}}$

(6) $\left(8^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \div \left(4^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}$

演習３（解答）

次の計算を行え（解答はa^mの形でよい）

(1) $9^{\frac{3}{2}}$

$$= (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^{2\times\frac{3}{2}} = 3^3$$

(2) $8^{-\frac{4}{3}}$

$$= (2^3)^{-\frac{4}{3}} = 2^{3\times\left(-\frac{4}{3}\right)}$$
$$= 2^{-4} = \frac{1}{2^4}$$

(3) $0.04^{1.5}$

$$= \left(\frac{4}{100}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{2^2}{10^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{2^{2\times\frac{3}{2}}}{10^{2\times\frac{3}{2}}} = \frac{2^3}{10^3} = \frac{2^3}{2^3\times5^3} = \frac{1}{5^3}$$

(4) $2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{6}} \div 2^{\frac{1}{3}}$

$$= 2^{-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{-3+5-2}{6}}$$
$$= 2^{-\frac{0}{6}} = 1$$

(5) $\left(9^{\frac{2}{3}} \times 3^{-2}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$= 9^{\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}} \times 3^{-2\times\frac{3}{2}}$$
$$= 9^1 \times 3^{-3} = 3^{2-3}$$
$$= 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

(6) $\left(8^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \div \left(4^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}$

$$= 8^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}} \div 4^{-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}$$
$$= (2^3)^{\frac{1}{4}} \times (2^2)^{\frac{1}{8}} \div (2^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 2^{3\times\frac{1}{4}} \times 2^{2\times\frac{1}{8}} \div 2^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$= 2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-(-1)} = 2^2$$

演習4

各問のxを求めよ。

(1)　$4^x = 64$

(2)　$2^{3x-2} = 128$

(3)　$125^{x-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^{x-6}$

(4)　$\sqrt{2} \times 4^x = 8$

(5)　$4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$

$2^x = t$とおく（$t > 0$）

(6)　$2^{2x+1} - 5 \times 2^x - 12 = 0$

$2^x = t$とおく（$t > 0$）

演習4（解答）

各問のxを求めよ。

(1) $4^x = 64$

$(2^2)^x = 2^6 \rightarrow 2^{2x} = 2^6$

$\rightarrow 2x = 6$

$x = 3$

(2) $2^{3x-2} = 128$

$2^{3x-2} = 2^7$

$\rightarrow 3x - 2 = 7$

$x = \dfrac{9}{3} = 3$

(3) $125^{x-1} = \left(\dfrac{1}{25}\right)^{x-6}$

$(5^3)^{x-1} = (5^{-2})^{x-6}$

$5^{3(x-1)} = 5^{-2(x-6)}$

$\rightarrow 3(x-1) = -2(x-6)$

$3x - 3 = -2x + 12$

$5x = 15 \rightarrow x = 3$

(4) $\sqrt{2} \times 4^x = 8$

$2^{\frac{1}{2}} \times (2^2)^x = 2^3$

$2^{\frac{1}{2}+2x} = 2^3$

$\rightarrow \dfrac{1}{2} + 2x = 3$

$1 + 4x = 6$

$4x = 5 \rightarrow x = \dfrac{5}{4}$

(5) $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$

$2^x = t$とおく（$t > 0$）

$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$

$t^2 + 2t - 24 = 0$

$(t+6)(t-4) = 0$

$t = 4, -3 \rightarrow 2^x = 4 \rightarrow x = 2$

(6) $2^{2x+1} - 5 \times 2^x - 12 = 0$

$2^x = t$とおく（$t > 0$）

$2t^2 - 5t - 12 = 0$

$(2t+3)(t-4) = 0$

2 ╲╱ 3 → 3

1 ╱╲ -4 →-8

$t = 4, -\dfrac{3}{2} \rightarrow 2^x = 4 \rightarrow x = 2$

対数の計算のルール

$X = a^b \quad \rightarrow b = \log_a X$

$\log_a X$ 真数 底（てい）

$4 = 2^2 \quad \rightarrow \log_2 4 = 2$
$2 = 2^1 \quad \rightarrow \log_2 2 = 1$
$1 = 2^0 \quad \rightarrow \log_2 1 = 0$
$0.5 = 2^{-1} \quad \rightarrow \log_2 0.5 = -1$
$0.25 = 2^{-2} \quad \rightarrow \log_2 0.25 = -2$

$X \rightarrow X[\mathrm{dB}] = 20\log_{10} X$

$100 \quad \rightarrow 20\log_{10}100 = 20 \times 2 = 40\ \mathrm{dB}$
$10 \quad \rightarrow 20\log_{10}10 = 20 \times 1 = 20\ \mathrm{dB}$
$1 \quad \rightarrow 20\log_{10}1 = 20 \times 0 = 0\ \mathrm{dB}$
$0.1 \quad \rightarrow 20\log_{10}0.1 = 20 \times (-1) = -20\ \mathrm{dB}$
$0.01 \quad \rightarrow 20\log_{10}0.01 = 20 \times (-2) = -40\ \mathrm{dB}$

公式一覧

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a b^m = m\log_a b$$

$$\log_a \frac{1}{b} = \log_a b^{-1} = -\log_a b$$

$$\log_a \frac{b^m}{b^n} = \log_a b^{m-n} = (m-n)\log_a b$$

$$\log_a BC = \log_a B + \log_a C$$

$$\log_a \frac{B}{C} = \log_a B - \log_a C$$

演習5

各問を対数関数の式に変換せよ。また，xの値を求めよ

(1)　$2^x = 8$

(2)　$4^x = 64$

(3)　$5^x = 125$

(4)　$3^x = 81$

(5)　$2^x = 28$

(6)　$3^x = 144$

演習５（解答）

各問を対数関数の式に変換せよ。また，xの値を求めよ

（1）$2^x = 8$

$x = \log_2 8 = 3$

（2）$4^x = 64$

$x = \log_4 64 = 3$

（3）$5^x = 125$

$x = \log_5 125 = 3$

（4）$3^x = 81$

$x = \log_3 81 = 4$

（5）$2^x = 28$

$x = \log_2 28 = \log_2 4 \times 7$
$= \log_2 4 + \log_2 7$
$= 2 + \log_2 7$

（6）$3^x = 144$

$x = \log_3 144 = \log_3 9 \times 16$
$= \log_3 9 + \log_3 16$
$= 2 + \log_3 2^4$
$= 2 + 4\log_3 2$

演習6

次の値を求めよ。

（１） $\log_3 27$

Ans.

（２） $\log_4 1$

Ans.

（３） $\log_2 \frac{1}{16}$

Ans.

（４） $\log_{0.1} 10$

Ans.

（５） $\log_2 \frac{3}{4} - \log_2 \frac{3}{2}$

Ans.

（６） $\frac{1}{2}\log_4 5 - \log_4 \frac{\sqrt{5}}{2}$

Ans.

（７） $\log_2(3+\sqrt{5}) + \log_2(3-\sqrt{5})$

Ans.

（８） $3\log_5 15 - \log_5 135$

Ans.

演習6（解答）

次の値を求めよ。

（1） $\log_3 27$

$\log_3 27 = \log_3 3^3$
$= 3 \times \log_3 3 = 3$

Ans. 3

（2） $\log_4 1$

$\log_4 1 = \log_4 4^0$
$= 0 \times \log_4 4 = 0$

Ans. 0

（3） $\log_2 \frac{1}{16}$

$\log_2 \frac{1}{16} = \log_2 2^{-4} = -4$

Ans. -4

（4） $\log_{0.1} 10$

$\log_{0.1} 10 = \log_{0.1} \left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$
$= \log_{0.1} 0.1^{-1} = -1$

Ans. -1

（5） $\log_2 \frac{3}{4} - \log_2 \frac{3}{2}$

$= \log_2 \left(\frac{3}{4} \div \frac{3}{2}\right)$
$= \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1}$
$= -1$

Ans. -1

（6） $\frac{1}{2}\log_4 5 - \log_4 \frac{\sqrt{5}}{2}$

$= \frac{1}{2}\log_4 5 - \log_4 \sqrt{\frac{5}{4}}$
$= \frac{1}{2}\log_4 5 - \frac{1}{2}\log_4 \frac{5}{4}$
$= \frac{1}{2}\log_4 \left(5 \div \frac{5}{4}\right)$
$= \frac{1}{2}\log_4 4 = \frac{1}{2}$

Ans. $\frac{1}{2}$

（7） $\log_2(3+\sqrt{5}) + \log_2(3-\sqrt{5})$

$= \log_2(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$
$= \log_2(9-5) = \log_2 4$
$= \log_2 2^2 = 2$

Ans. 2

（8） $3\log_5 15 - \log_5 135$

$= \log_5 15^3 - \log_5 135$
$= \log_5 \frac{15^3}{135} = \log_5 \frac{5^3 \times 3^3}{27 \times 5}$
$= \log_5 5^2 = 2$

Ans. 2

演習7

各問のxを求めよ。（解答はa^mの形でよい）

（1） $\log_2 x = -5$

（2） $\log_4(x-3) = \frac{1}{2}$

（3） $\log_5(4x+1) = 2$

（4） $\log_2 x + \log_2(x+3) = 2$

（5） $\log_3(2x+1) + \log_3(x-3) = 2$

（6） $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^4 + 3 = 0$

$\log_2 x = t$とおく

演習７（解答）

各問のxを求めよ。（解答はa^mの形でよい）

（1） $\log_2 x = -5$

$x = 2^{-5} = \dfrac{1}{2^5}$

（2） $\log_4(x-3) = \dfrac{1}{2}$

$x - 3 = 4^{\frac{1}{2}} = 2$
$x = 2 + 3$
$x = 5$

（3） $\log_5(4x+1) = 2$

$4x + 1 = 5^2 = 25$
$4x = 24$
$x = 6$

（4） $\log_2 x + \log_2(x+3) = 2$

$\log_2 x(x+3) = 2$
$x(x+3) = 2^2$
$x^2 + 3x - 4 = 0$
$(x+4)(x-1) = 0$
$x = 1$

※$\log x$は$x > 0$

（5） $\log_3(2x+1) + \log_3(x-3) = 2$

$\log_3(2x+1)(x-3) = 2$
$(2x+1)(x-3) = 3^2$
$2x^2 - 5x - 3 = 9$
$2x^2 - 5x - 12 = 0$
$(2x+3)(x-4) = 0$
$x = 4$

（6） $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^4 + 3 = 0$

$\log_2 x = t$とおく

$(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + 3 = 0$
$t^2 - 4t + 3 = 0$
$(t-3)(t-1) = 0$
$\log_2 x = 1 \rightarrow x = 2^1 = 2$
$\log_2 x = 3 \rightarrow x = 2^3 = 8$

ご聴講ありがとうございました!!