講義中の注意

〇講義中は、参加者のマイク・カメラの機能はミュート状態になります。

〇進行はスタッフ及び講師が行いますので、指示に従ってください。

〇質疑応答の時間は、参加者のマイクをオンにして質問を受け付けることもあります。希望される方は「チャット欄」で申し出てください。

電験三種　ライブ講義

第9回　複素数

2021.08.14 Sat

複素数

複素数とは実数と虚数成分を含む数

$$\dot{\alpha} = a + jb \ (a, b \text{ 実数})$$

虚数とは2乗して－1になる数

$$j = \sqrt{-1}$$
$$j^2 = -1$$

実部：複素数の実数成分

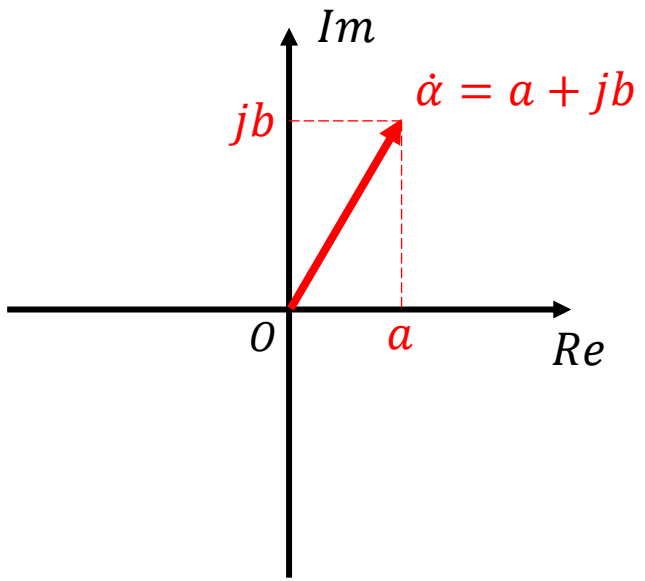
$$Re(\alpha) = a$$

虚部：複素数の虚数成分

$$Im(\alpha) = b$$

複素平面

横軸を複素数の実部（実軸）
縦軸を複素数の虚部（虚軸）
として複素数を表現する平面図



複素数の計算

＜足算、引算＞
実部同士、虚部同士をそれぞれ計算する

$$\dot{\alpha} = a + jb, \qquad \dot{\beta} = c + jd$$
$$\dot{\alpha} + \dot{\beta} = a + jb + c + jd$$
$$= a + c + j(b + d)$$

$$\dot{\alpha} - \dot{\beta} = a + jb - (c + jd)$$
$$= a + jb - c - jd$$
$$= a - c + j(b - d)$$

＜掛算＞
因数分解と同じように計算する
$j^2 = -1$となることに注意する！

$$\dot{\alpha} = a + jb, \qquad \dot{\beta} = c + jd$$
$$\dot{\alpha} \times \dot{\beta} = (a + jb)(c + jd)$$
$$= ac + jad + jbc + j^2bd$$
$$= ac + jad + jbc - bd$$
$$= ac - bd + j(ad + bc)$$

練習問題1

（1） $(3+j2)+(4+j5)$

Ans.

（2） $(6+j4)+(2-j3)$

Ans.

（3） $(7-j6)+(-3+j11)$

Ans.

（4） $(8-j4)+(-7-j12)$

Ans.

（5） $(2+j3)(5+j4)$

Ans.

（6） $(4+j2)(6-j2)$

Ans.

（7） $(7+j3)(-4+j5)$

Ans.

（8） $(1-j4)(6-j7)$

Ans.

練習問題1

（1）$(3+j2)+(4+j5)$

$=3+4+j(2+5)$
$=7+j7$

Ans. $7+j7$

（2）$(6+j4)+(2-j3)$

$=6+2+j(4-3)$
$=8+j1$

Ans. $8+j1$

（3）$(7-j6)+(-3+j11)$

$=7-3+j(-6+11)$
$=4+j5$

Ans. $4+j5$

（4）$(8-j4)+(-7-j12)$

$=8-7+j(-4-12)$
$=1-j16$

Ans. $1-j16$

（5）$(2+j3)(5+j4)$

Ans.

（6）$(4+j2)(6-j2)$

Ans.

（7）$(7+j3)(-4+j5)$

Ans.

（8）$(1-j4)(6-j7)$

Ans.

練習問題1

（1） $(3+j2)+(4+j5)$

$=3+4+j(2+5)$
$=7+j7$

Ans. $7+j7$

（2） $(6+j4)+(2-j3)$

$=6+2+j(4-3)$
$=8+j1$

Ans. $8+j1$

（3） $(7-j6)+(-3+j11)$

$=7-3+j(-6+11)$
$=4+j5$

Ans. $4+j5$

（4） $(8-j4)+(-7-j12)$

$=8-7+j(-4-12)$
$=1-j16$

Ans. $1-j16$

（5） $(2+j3)(5+j4)$

$=10+j8+j15-12\times j^2$
$=10+j8+j15-12\times(-1)$
$=10+12+j8+j15$
$=22+j23$

Ans. $-2+j23$

（6） $(4+j2)(6-j2)$

$=24-j8+j12-4\times j^2$
$=24-j8+j12-4\times(-1)$
$=24+4-j8+j12$
$=28+j4$

Ans. $28+j4$

（7） $(7+j3)(-4+j5)$

$=-28+j35-j12+15\times j^2$
$=-28+j35-j12+15\times(-1)$
$=-28-15+j35-j12$
$=-43+j23$

Ans. $-43+j23$

（8） $(1-j4)(6-j7)$

$=6-j7-j24+28\times j^2$
$=6-j7-j24+28\times(-1)$
$=6-28-j7-j24$
$=-22-j31$

Ans. $-22-j31$

練習問題2

（1）$(2+j3)^2$

Ans.

（2）$(2+j2)^2$

Ans.

（3）$(5-j4)^2$

Ans.

（4）$(6-j7)^2$

Ans.

（5）$(5+j2)(5-j2)$

Ans.

（6）$(3+j3)(3-j3)$

Ans.

（7）$(3+j4)(3-j4)$

Ans.

（8）$(-4+j6)(4+j6)$

Ans.

練習問題2

（1）$(2+j3)^2$

$= 4 + j12 + 9 \times j^2$
$= 4 + j12 + 9 \times (-1)$
$= 4 - 9 + j12$
$= -5 + j12$

Ans. $-5 + j12$

（2）$(2+j2)^2$

$= 4 + j8 + 4 \times j^2$
$= 4 + j8 + 4 \times (-1)$
$= 4 - 4 + j8$
$= j8$

Ans. $j8$

（3）$(5-j4)^2$

$= 25 - j40 + 16 \times j^2$
$= 25 - j40 + 16 \times (-1)$
$= 25 - 16 - j40$
$= 9 - j40$

Ans. $9 - j40$

（4）$(6-j7)^2$

$= 36 - j84 + 49 \times j^2$
$= 36 - j84 + 49 \times (-1)$
$= 36 - 49 - j84$
$= -13 - j84$

Ans. $-13 - j84$

（5）$(5+j2)(5-j2)$

Ans.

（6）$(3+j3)(3-j3)$

Ans.

（7）$(3+j4)(3-j4)$

Ans.

（8）$(-4+j6)(4+j6)$

Ans.

練習問題2

（1）$(2+j3)^2$

$= 4 + j12 + 9 \times j^2$
$= 4 + j12 + 9 \times (-1)$
$= 4 - 9 + j12$
$= -5 + j12$

Ans. $-5 + j12$

（2）$(2+j2)^2$

$= 4 + j8 + 4 \times j^2$
$= 4 + j8 + 4 \times (-1)$
$= 4 - 4 + j8$
$= j4$

Ans. $j8$

（3）$(5-j4)^2$

$= 25 - j40 + 16 \times j^2$
$= 25 - j40 + 16 \times (-1)$
$= 25 - 16 - j40$
$= 9 - j40$

Ans. $9 - j40$

（4）$(6-j7)^2$

$= 36 - j84 + 49 \times j^2$
$= 36 - j84 + 49 \times (-1)$
$= 36 - 49 - j84$
$= -13 - j84$

Ans. $-13 - j84$

（5）$(5+j2)(5-j2)$

$= 25 - 4 \times j^2$
$= 25 - 4 \times (-1)$
$= 25 + 4$
$= 29$

Ans. 29

（6）$(3+j3)(3-j3)$

$= 9 - 9 \times j^2$
$= 9 - 9 \times (-1)$
$= 9 + 9$
$= 18$

Ans. 18

（7）$(3+j4)(3-j4)$

$= 9 - 16 \times j^2$
$= 9 - 16 \times (-1)$
$= 9 + 16$
$= 25$

Ans. 25

（8）$(-4+j6)(4+j6)$

$= (j6-4)(j6+4)$
$= 36 \times j^2 - 16$
$= -36 - 16$
$= -52$

Ans. -52

複素数の計算

＜割算（分数）＞
有理化を行うのが一般的である

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}=\frac{1}{j}=\frac{j}{j\times j}=-j$$

$$\dot{\alpha}=a+jb,\qquad \dot{\beta}=c+jd$$

$$\frac{1}{\dot{\alpha}}=\frac{1}{a+jb}=\frac{(a-jb)}{(a+jb)(a-jb)}$$
$$=\frac{a-jb}{a^2+b^2}$$

$$\dot{\alpha}=a+jb,\qquad \dot{\beta}=c+jd$$

$$\frac{\dot{\alpha}}{\dot{\beta}}=\frac{a+jb}{c+jd}=\frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)}$$
$$=\frac{ac-jad+jbc-j^2bd}{c^2+d^2}$$
$$=\frac{ac+bd-jad+jbc}{c^2+d^2}$$
$$=\frac{ac+bd+j(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

練習問題3

(1) $\dfrac{1}{1+j2}$

Ans.

(2) $\dfrac{1}{2+j3}$

Ans.

(3) $\dfrac{1}{3+j4}$

Ans.

(4) $\dfrac{1}{3+j6}$

Ans.

(5) $\dfrac{1+j2}{1+j3}$

Ans.

(6) $\dfrac{2-j3}{1+j}$

Ans.

(7) $\dfrac{4-j3}{3-j2}$

Ans.

練習問題3

(1) $\dfrac{1}{1+j2}$

$= \dfrac{1-j2}{(1+j2)(1-j2)}$

$= \dfrac{1-j2}{1+4} = \dfrac{1-j2}{5}$

Ans. $\dfrac{1-j2}{5}$

(2) $\dfrac{1}{2+j3}$

$= \dfrac{2-j3}{(2+j3)(2-j3)}$

$= \dfrac{2-j3}{4+9} = \dfrac{2-j3}{13}$

Ans. $\dfrac{2-j3}{13}$

(3) $\dfrac{1}{3+j4}$

$= \dfrac{3-j4}{(3+j4)(3-j4)}$

$= \dfrac{3-j4}{9+16} = \dfrac{3-j4}{25}$

Ans. $\dfrac{3-j4}{25}$

(4) $\dfrac{1}{3+j6}$

$= \dfrac{3-j6}{(3+j6)(3-j6)}$

$= \dfrac{3-j6}{9+36} = \dfrac{3-j6}{45} = \dfrac{1-j2}{15}$

Ans. $\dfrac{1-j2}{15}$

(5) $\dfrac{1+j2}{1+j3}$

Ans.

(6) $\dfrac{2-j3}{1+j}$

Ans.

(7) $\dfrac{4-j3}{3-j2}$

Ans.

練習問題3

(1) $\dfrac{1}{1+j2}$

$= \dfrac{1-j2}{(1+j2)(1-j2)}$

$= \dfrac{1-j2}{1+4} = \dfrac{1-j2}{5}$

Ans. $\dfrac{1-j2}{5}$

(2) $\dfrac{1}{2+j3}$

$= \dfrac{2-j3}{(2+j3)(2-j3)}$

$= \dfrac{2-j3}{4+9} = \dfrac{2-j3}{13}$

Ans. $\dfrac{2-j3}{13}$

(3) $\dfrac{1}{3+j4}$

$= \dfrac{3-j4}{(3+j4)(3-j4)}$

$= \dfrac{3-j4}{9+16} = \dfrac{3-j4}{25}$

Ans. $\dfrac{3-j4}{25}$

(4) $\dfrac{1}{3+j6}$

$= \dfrac{3-j6}{(3+j6)(3-j6)}$

$= \dfrac{3-j6}{9+36} = \dfrac{3-j6}{45} = \dfrac{1-j2}{15}$

Ans. $\dfrac{1-j2}{15}$

(5) $\dfrac{1+j2}{1+j3}$

$= \dfrac{(1+j2)(1-j3)}{(1+j3)(1-j3)}$

$= \dfrac{1-j3+j2-6\times j^2}{1+9}$

$= \dfrac{1+6-j3+j2}{10}$

$= \dfrac{7-j}{10}$

Ans. $\dfrac{7-j}{10}$

(6) $\dfrac{2-j3}{1+j}$

$= \dfrac{(2-j3)(1-j)}{(1+j)(1-j)}$

$= \dfrac{2-j2-j3+3\times j^2}{1+1}$

$= \dfrac{2-3-j2-j3}{2}$

$= \dfrac{-1-j5}{2}$

Ans. $\dfrac{-1-j5}{2}$

(7) $\dfrac{4-j3}{3-j2}$

$= \dfrac{(4-j3)(3+j2)}{(3-j2)(3+j2)}$

$= \dfrac{12+j8-j9-6\times j^2}{9+4}$

$= \dfrac{12+6+j8-j9}{13}$

$= \dfrac{18-j}{13}$

Ans. $\dfrac{18-j}{13}$

複素数

$\dot{\alpha} = a + jb$ (a, b 実数)　　$\dot{\alpha} = \alpha\angle\theta$ フェーザ表示

絶対値　位相

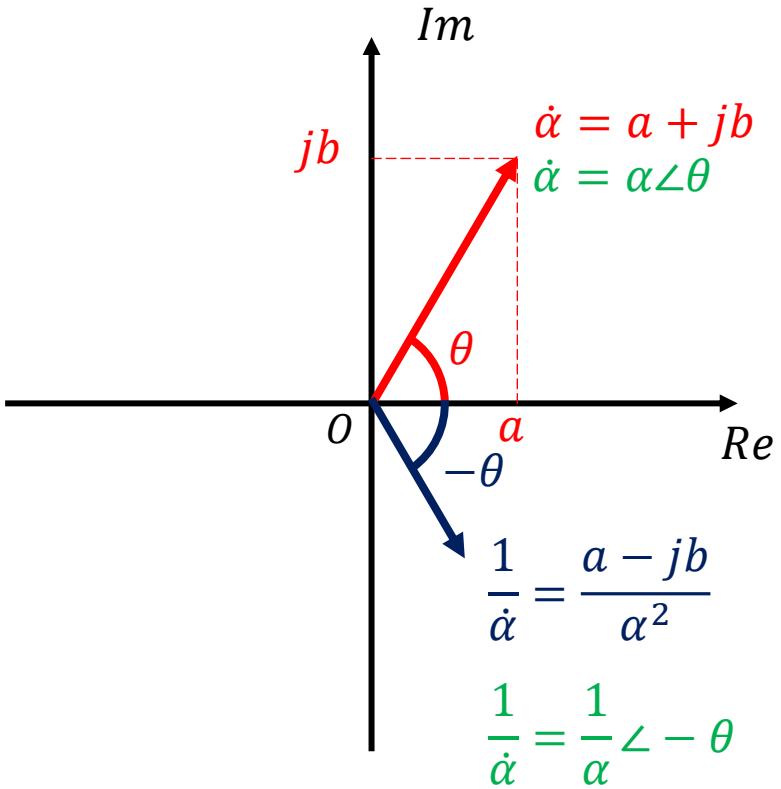
$$\alpha = |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\frac{1}{\dot{\alpha}} = \frac{1}{a + jb} = \frac{a - jb}{(a + jb)(a - jb)}$$

$$= \frac{a - jb}{a^2 + b^2} = \frac{a - jb}{\alpha^2}$$

$\frac{1}{\dot{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\angle -\theta$ フェーザ表示

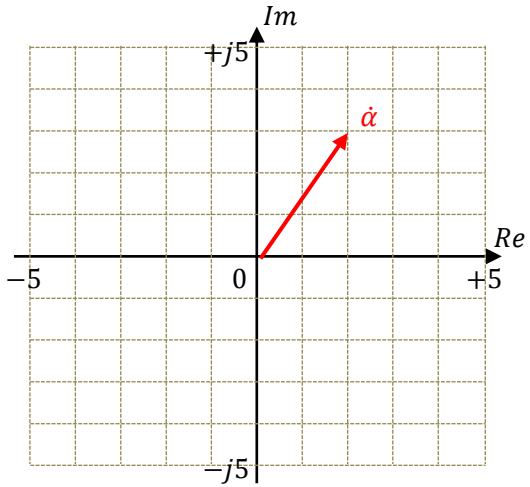


練習問題4

（1）

$\dot{\alpha} = 2 + j3$

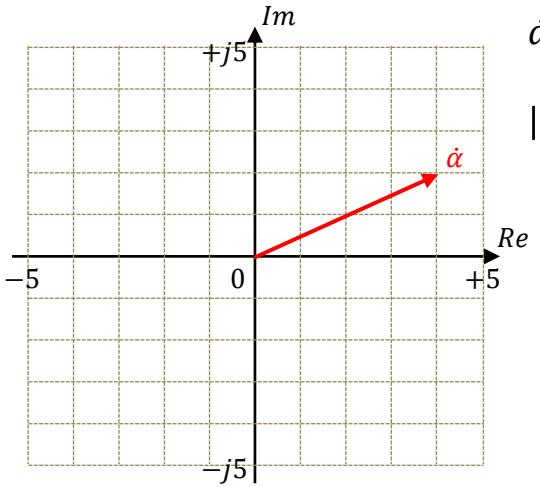
$|\dot{\alpha}| =$



（2）

$\dot{\alpha} =$

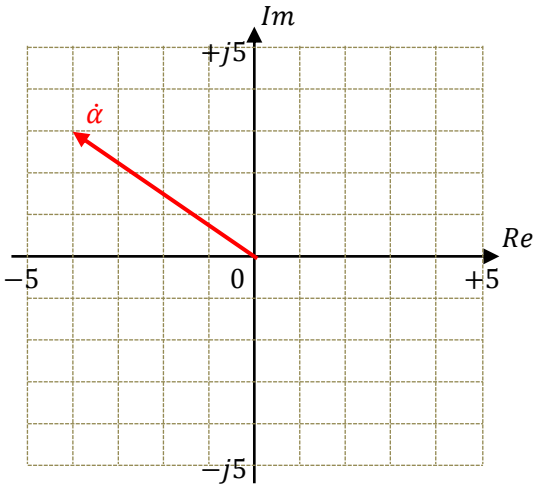
$|\dot{\alpha}| =$



（3）

$\dot{\alpha} =$

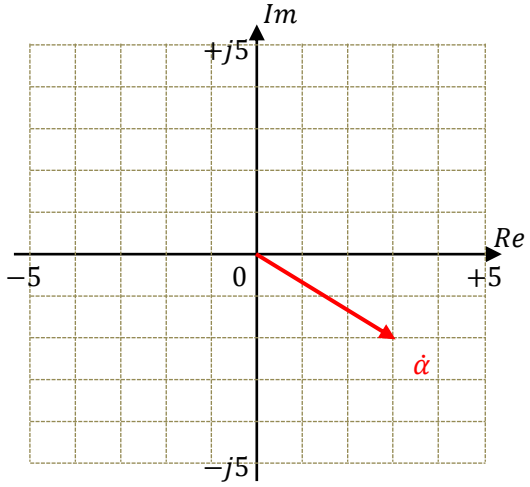
$|\dot{\alpha}| =$



（4）

$\dot{\alpha} =$

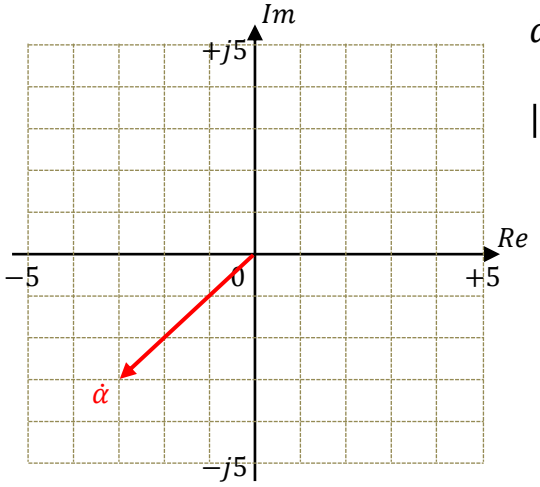
$|\dot{\alpha}| =$



（5）

$\dot{\alpha} =$

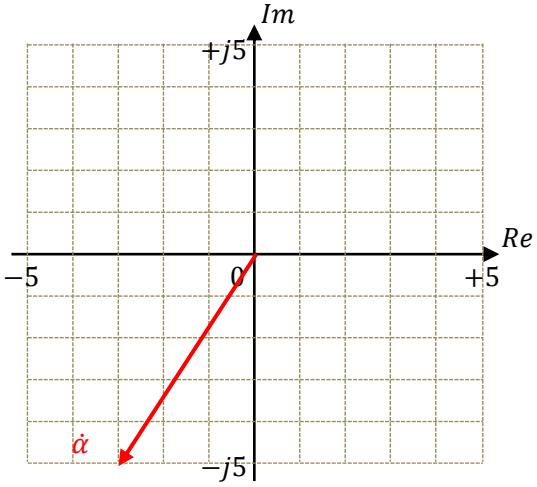
$|\dot{\alpha}| =$



（6）

$\dot{\alpha} =$

$|\dot{\alpha}| =$

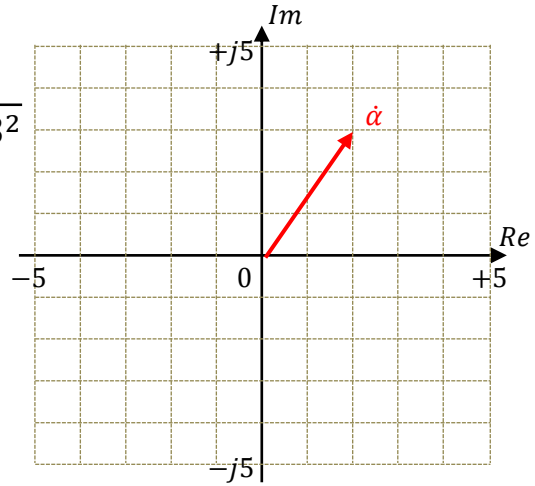


練習問題4

（1）

$\dot{\alpha} = 2 + j3$

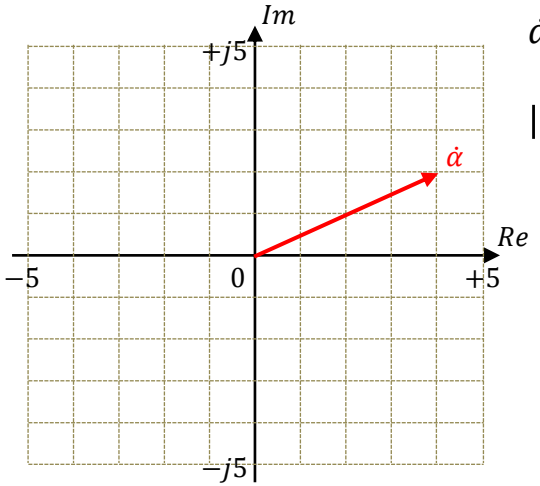
$|\dot{\alpha}| = \sqrt{2^2 + 3^2}$
$= \sqrt{4 + 9}$
$= \sqrt{13}$



（2）

$\dot{\alpha} =$

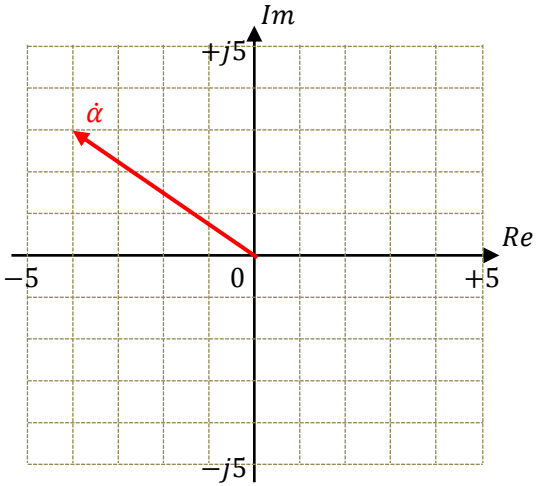
$|\dot{\alpha}| =$



（3）

$\dot{\alpha} =$

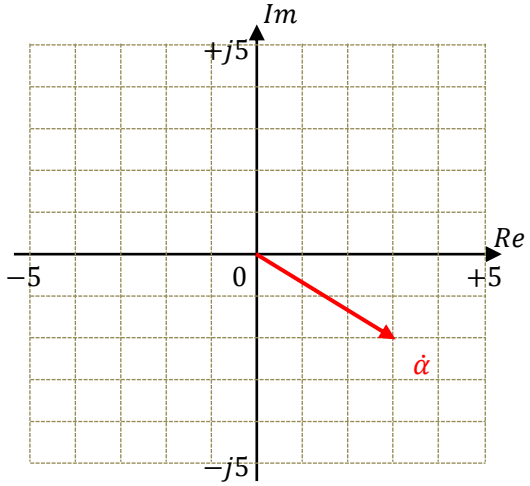
$|\dot{\alpha}| =$



（4）

$\dot{\alpha} =$

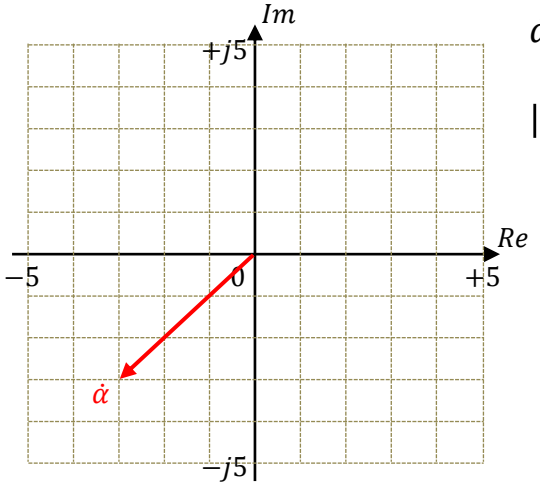
$|\dot{\alpha}| =$



（5）

$\dot{\alpha} =$

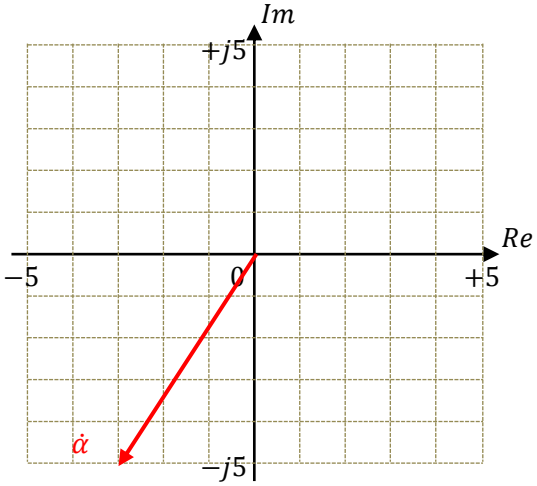
$|\dot{\alpha}| =$



（6）

$\dot{\alpha} =$

$|\dot{\alpha}| =$

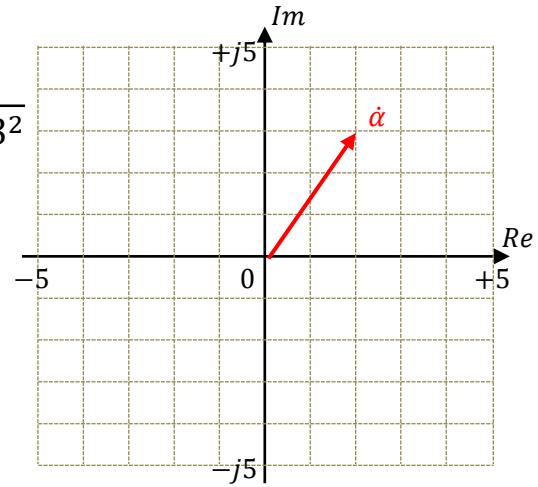


練習問題4

（1）

$\dot{\alpha} = 2 + j3$

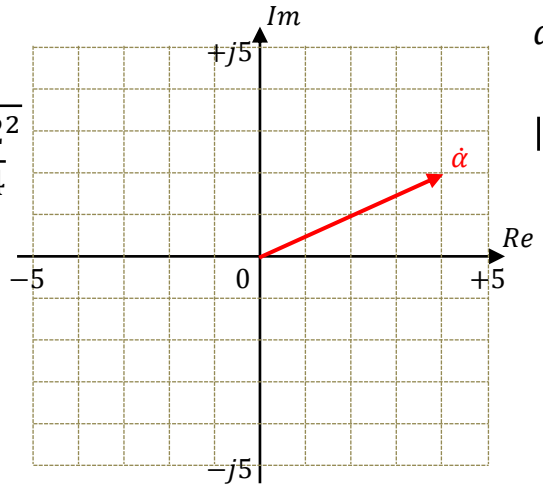
$|\dot{\alpha}| = \sqrt{2^2 + 3^2}$
$= \sqrt{4 + 9}$
$= \sqrt{13}$



（2）

$\dot{\alpha} = 4 + j2$

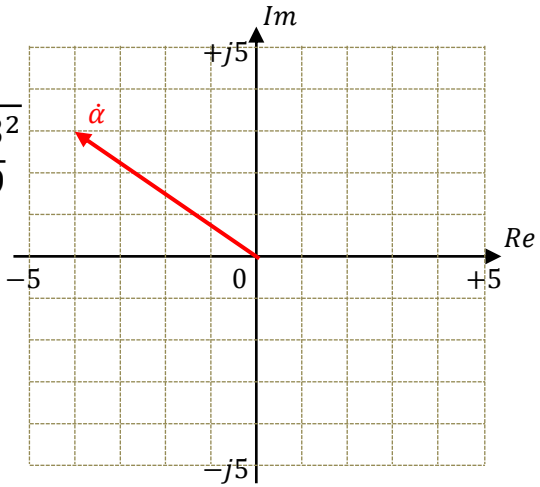
$|\dot{\alpha}| = \sqrt{4^2 + 2^2}$
$= \sqrt{16 + 4}$
$= \sqrt{20}$
$= 2\sqrt{5}$



（3）

$\dot{\alpha} = -4 + j3$

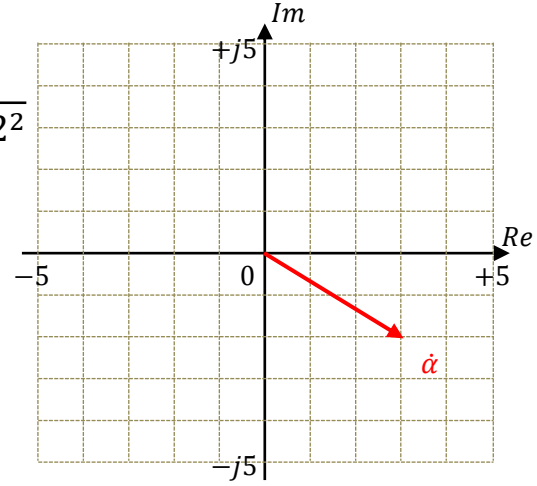
$|\dot{\alpha}| = \sqrt{4^2 + 3^2}$
$= \sqrt{16 + 9}$
$= \sqrt{25}$
$= 5$



（4）

$\dot{\alpha} = 3 - j2$

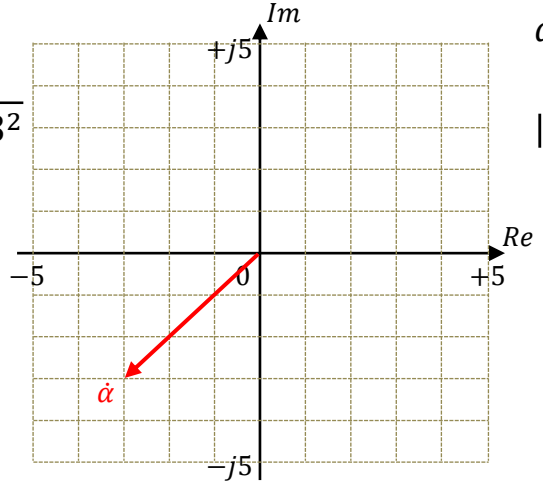
$|\dot{\alpha}| = \sqrt{3^2 + 2^2}$
$= \sqrt{9 + 4}$
$= \sqrt{13}$



（5）

$\dot{\alpha} = -3 - j3$

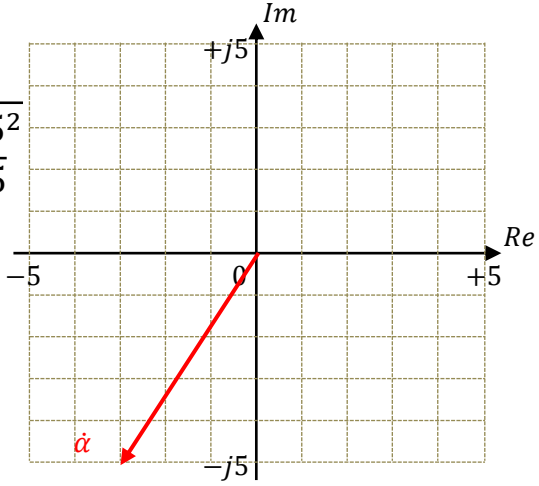
$|\dot{\alpha}| = \sqrt{3^2 + 3^2}$
$= \sqrt{9 + 9}$
$= \sqrt{18}$
$= 3\sqrt{2}$



（6）

$\dot{\alpha} = -3 - j5$

$|\dot{\alpha}| = \sqrt{3^2 + 5^2}$
$= \sqrt{9 + 25}$
$= \sqrt{34}$



練習問題5

（1）$\dot{\alpha} = 1 + j$

$|\dot{\alpha}| =$

$\dot{\alpha}^2 = (1 + j)^2$

$|\dot{\alpha}^2| =$

（2）$\dot{\alpha} = 1 + j$

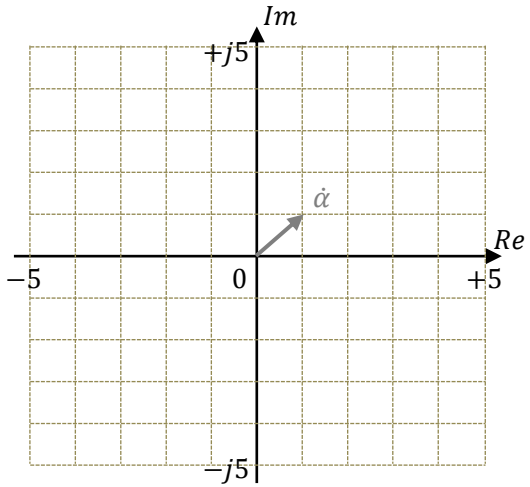
$\dot{\alpha}^3 = (1 + j)^2(1 + j)$

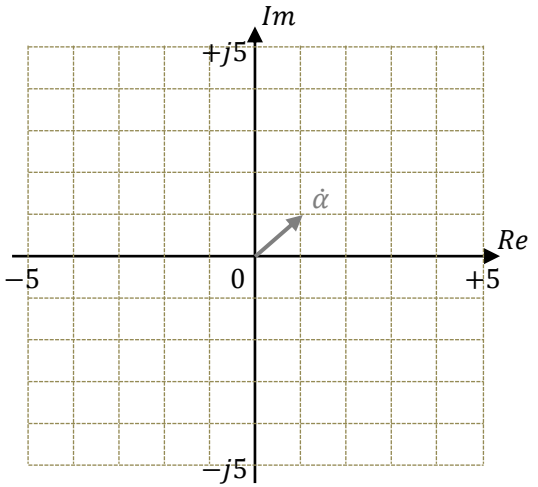
$|\dot{\alpha}^3| =$

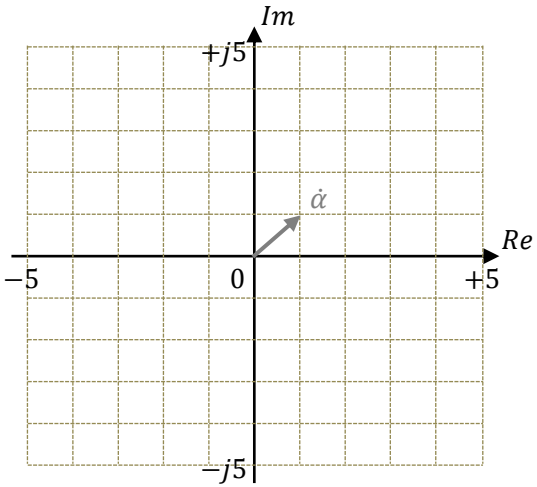
（3）$\dot{\alpha} = 1 + j$

$\dot{\alpha}^4 = (1 + j)^2(1 + j)^2$

$|\dot{\alpha}^4| =$







練習問題5

（1）$\dot{\alpha} = 1 + j$

$|\dot{\alpha}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\dot{\alpha}^2 = (1 + j)^2$
$= 1 + j2 + j^2$
$= 1 - 1 + j2$
$= j2$

$|\dot{\alpha}^2| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$

（2）$\dot{\alpha} = 1 + j$

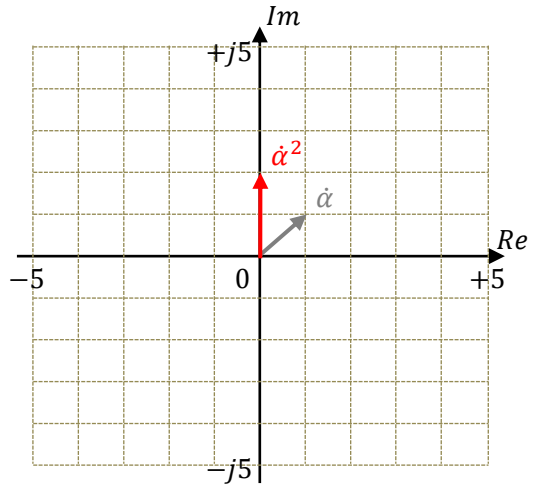
$\dot{\alpha}^3 = (1 + j)^2(1 + j)$
$= j2 \times (1 + j)$
$= j2 + j^2 2$
$= -2 + j2$

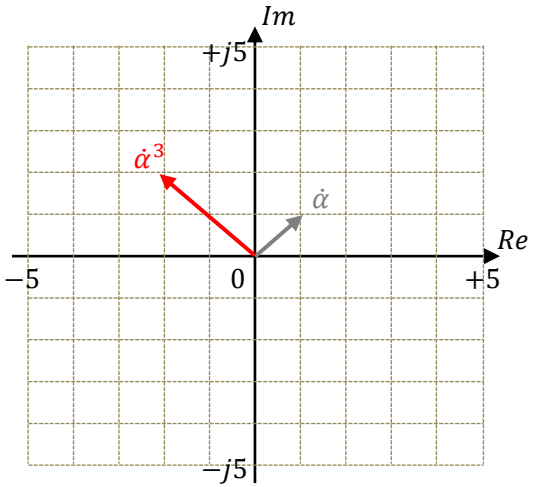
$|\dot{\alpha}^3| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$

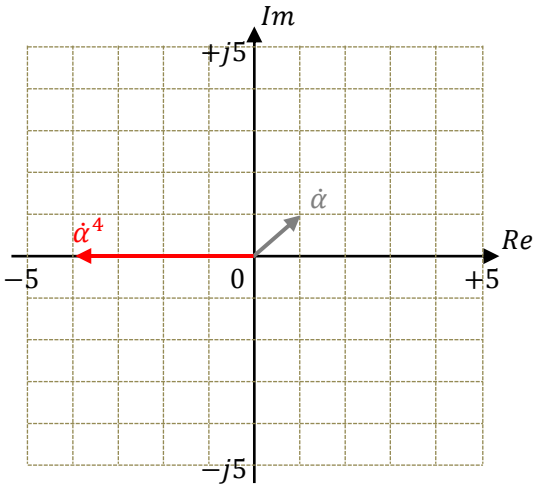
（3）$\dot{\alpha} = 1 + j$

$\dot{\alpha}^4 = (1 + j)^2(1 + j)^2$
$= j2 \times j2 = j^2 4$
$= -4$

$|\dot{\alpha}^4| = \sqrt{4^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$







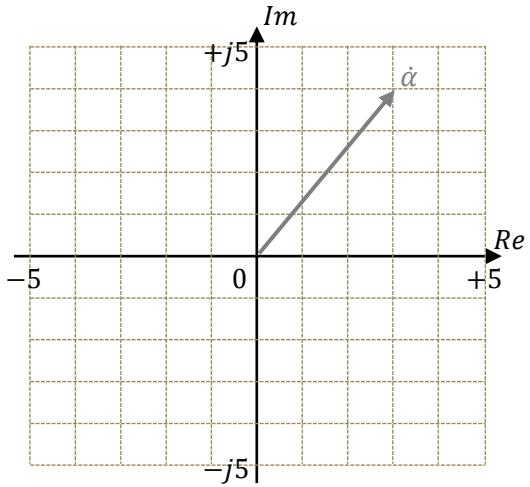
練習問題6

（1）$\dot{\alpha} = 3 + j4$

$|\dot{\alpha}| =$

$\dfrac{1}{\dot{\alpha}} =$

$\left|\dfrac{1}{\dot{\alpha}}\right| =$

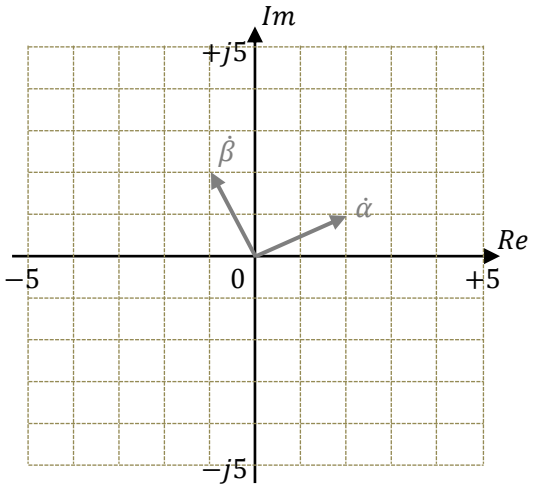


（2）$\dot{\alpha} = 2 + j, \quad \beta = -1 + j2$

$|\dot{\alpha}| =$
$|\dot{\beta}| =$

$\dot{\alpha}\dot{\beta} =$

$|\dot{\alpha}\dot{\beta}| =$

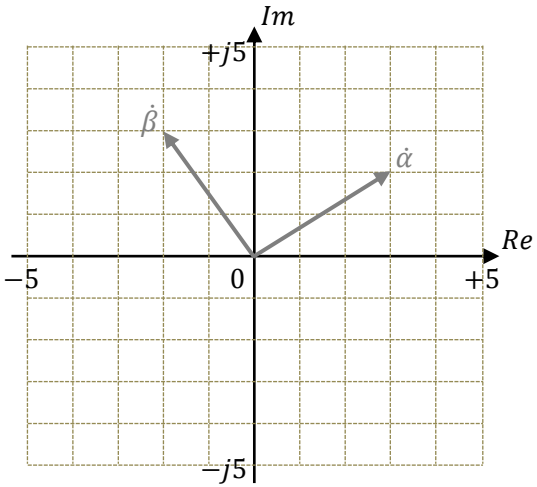


（3）$\dot{\alpha} = 3 + j2, \quad \beta = -2 + j3$

$|\dot{\alpha}| =$
$|\dot{\beta}| =$

$\dfrac{\dot{\alpha}}{\dot{\beta}} =$

$\left|\dfrac{\dot{\alpha}}{\dot{\beta}}\right| =$

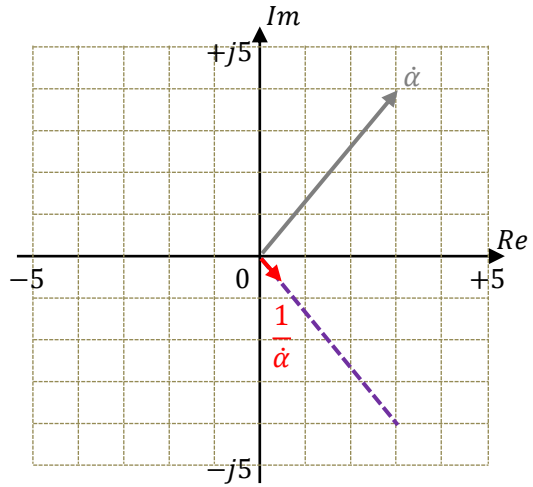


練習問題6

（1）$\dot{\alpha} = 3 + j4$

$$|\dot{\alpha}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\frac{1}{\dot{\alpha}} = \frac{1}{3 + j4} = \frac{(3 - j4)}{(3 + j4)(3 - j4)}$$
$$= \frac{3 - j4}{3^2 + 4^2} = \frac{3 - j4}{25}$$
$$\left|\frac{1}{\dot{\alpha}}\right| = \frac{1}{25}\sqrt{3^2 + 4^2} = \frac{1}{25}\sqrt{25}$$
$$= \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

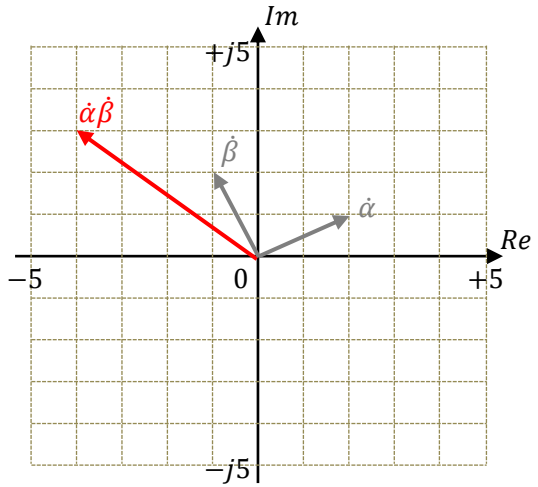


（2）$\dot{\alpha} = 2 + j, \quad \beta = -1 + j2$

$$|\dot{\alpha}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$
$$|\dot{\beta}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$\dot{\alpha}\dot{\beta} = (2 + j)(-1 + j2)$$
$$= -2 + j4 - j + j^2 2$$
$$= -2 - 2 + j4 - j$$
$$= -4 + j3$$

$$|\dot{\alpha}\dot{\beta}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

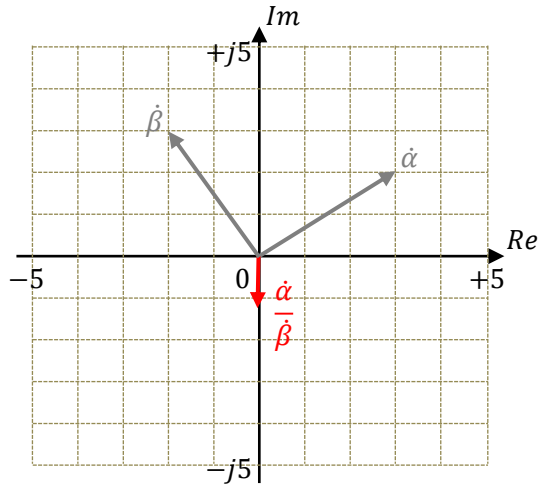


（3）$\dot{\alpha} = 3 + j2, \quad \beta = -2 + j3$

$$|\dot{\alpha}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$
$$|\dot{\beta}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$\frac{\dot{\alpha}}{\dot{\beta}} = \frac{3 + j2}{-2 + j3} = \frac{(3 + j2)(-2 - j3)}{(-2 + j3)(-2 - j3)}$$
$$= \frac{-6 - j9 - j4 - j^2 6}{2^2 + 3^2} = \frac{-j13}{13} = -j$$

$$\left|\frac{\dot{\alpha}}{\dot{\beta}}\right| = 1$$



ご聴講ありがとうございました!!