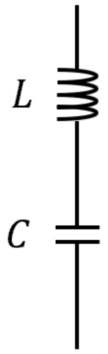
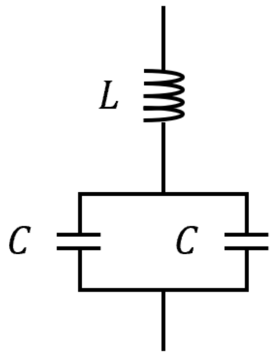
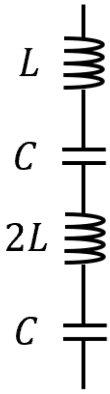
問１　負荷 A、B、C のそれぞれの共振周波数をf_{A}、f_{B}、f_{C}とする。３つの共振周波数の大小関係を示せ。（10 点）



負荷A
共振周波数f_{A}



負荷B
共振周波数f_{B}



負荷C
共振周波数f_{C}

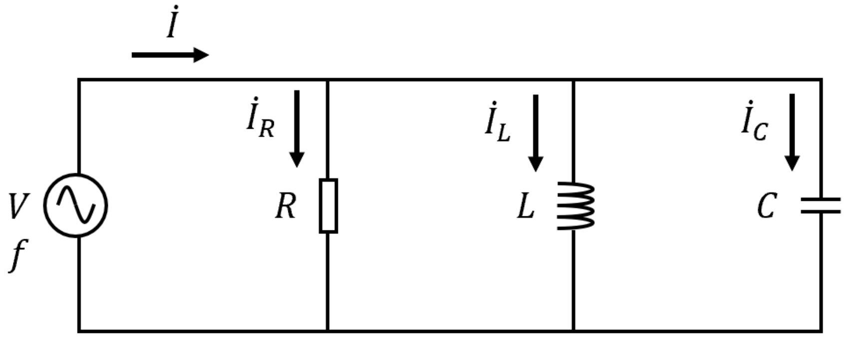
$$f_A = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$f_B = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C+C)}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2LC}} = \frac{1}{\sqrt{2}}f_A = 0.707f_A$$

$$f_C = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L+2L)\times\frac{C}{2}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{3}{2}LC}} = \sqrt{\frac{2}{3}}f_A = 0.816f_A$$

$$f_A > f_C > f_B$$

問 2　以下の図の交流回路において、電源の周波数を負荷の共振周波数の 2 倍の値に設定したところ、抵抗に流れる電流I_Rとコイルに流れる電流I_Lの大きさが同じになった。このとき、電流 $\dot{I}$、$\dot{I}_L$、$\dot{I}_C$のベクトルを図中に描け。（10 点）



共振角周波数ω_0は

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

このとき、コイルのリアクタンスX_LとコンデンサのリアクタンスXcは等しく、

$$jX_L = j\omega_0 L$$
$$-jX_C = -j\frac{1}{\omega_0 C}$$
$$X_L = X_C$$

周波数が 2 倍になると、

$$jX'_L = j2\omega_0 L = j2X_L \rightarrow \ X'_L = 2X_L \rightarrow X_L = \frac{X'_L}{2}$$
$$-jX'_C = -j\frac{1}{2\omega_0 C} = -j\frac{X_c}{2} \rightarrow X'_C = \frac{X_C}{2} \rightarrow X_C = 2X'_C$$

$$X_L = X_C \rightarrow \frac{X'_L}{2} = 2X'_C \rightarrow X'_C = \frac{X'_L}{4}$$

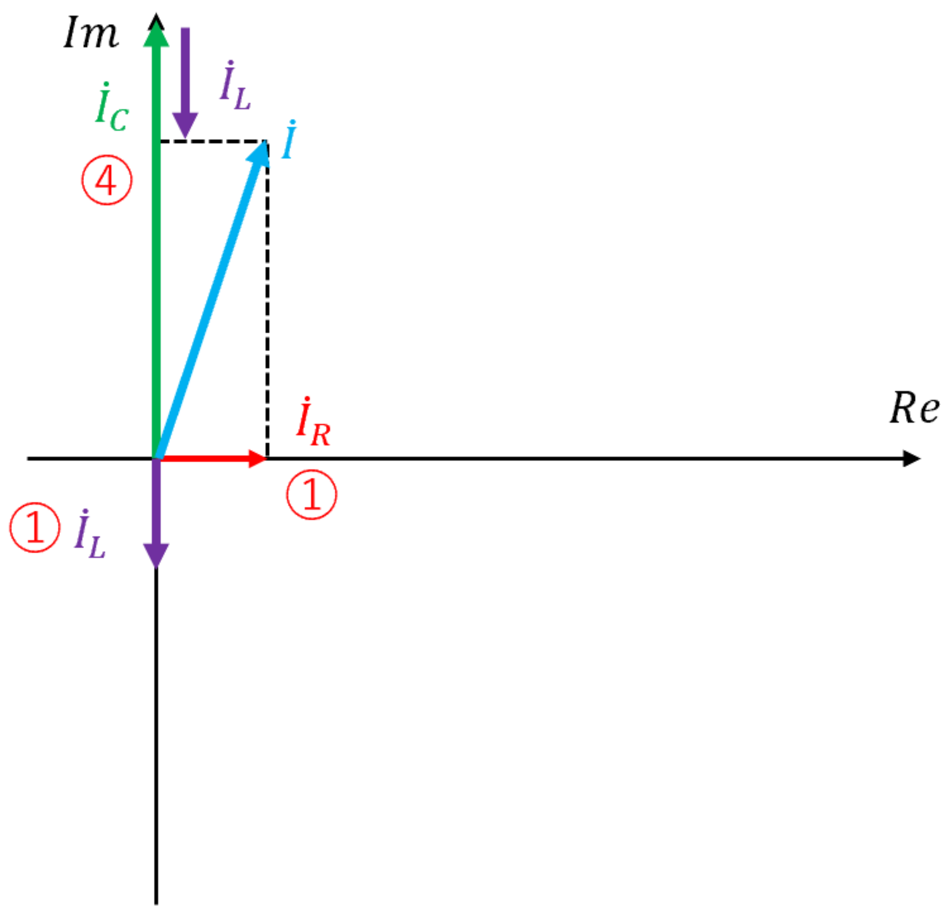
各電流を電源電圧Vを含む式で表すと、

$$\dot{I}_R = \frac{V}{R}$$

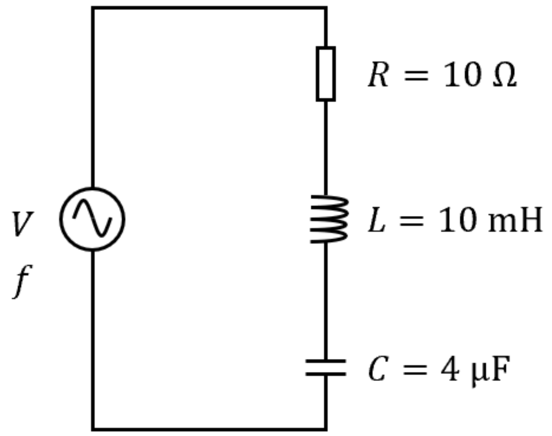
$$\dot{I}_L = \frac{V}{jX_L'} = -j\frac{V}{X_L'}$$

$$\dot{I}_C = \frac{V}{-jX_c'} = j\frac{V}{X_C'} = j\frac{V}{X_L'/4} = j4\frac{V}{X_L'}$$

ここで、$I_R = I_L$より、$I_C = 4I_R$となり、コンデンサに流れる電流I_Cの大きさは抵抗に流れる電流I_Rの 4 倍なる。以上のことをもとにベクトル図にまとめると、以下のようになる。



問３　以下の図の交流回路において、電源の周波数を負荷の共振周波数に設定した。このとき、コイルの両端の電圧の大きさは抵抗の両端の電圧の大きさの何倍になるか求めよ。（10 点）



共振時、抵抗の両端の電圧V_Rは、

$$V_R = V$$

回路に流れる電流Iは、

$$I = \frac{V}{R}$$

となる。

共振角周波数ω_0は、

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

このとき、コイルの両端で生じる電圧の大きさV_Lは、

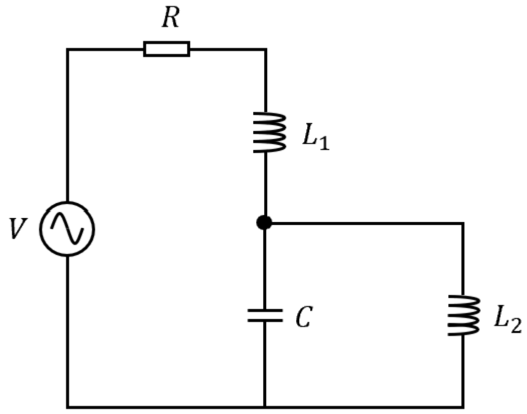
$$V_L = \omega_0 LI = \frac{1}{\sqrt{LC}} \times L \times \frac{V}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}V$$

$$V_L = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{10 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-6}}}V = \frac{\sqrt{2500}}{10}V = 5V$$

$$\frac{V_L}{V_R} = \frac{5V}{V} = 5$$

となり、コイルの両端の電圧の大きさは抵抗の両端の電圧の大きさの 5 倍となる。

問４　図に示す交流回路について、以下の問に答えよ。（小問　各 10 点）



回路のインピーダンス$\dot{Z}$の式は以下のようになる。

$$\dot{Z} = R + j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 \times \dfrac{1}{j\omega C}}{j\omega L_2 + \dfrac{1}{j\omega C}} = R + j\omega L_1 + j\frac{\omega L_2}{1-\omega^2 L_2 C}$$

$$= R + j\frac{\omega L_1(1-\omega^2 L_2 C) + \omega L_2}{1-\omega^2 L_2 C}$$

(1) 回路のインピーダンスが極めて小さくなる直列共振角周波数ω_1の式を示せ。

インピーダンス$\dot{Z}$の分子が 0（ゼロ）になる角周波数の条件を求めればよい。

$$\omega_1 L_1(1-\omega_1^2 L_2 C) + \omega L_2 = 0$$
$$L_1(1-\omega_1^2 L_2 C) + L_2 = 0$$
$$L_1 - \omega_1^2 L_1 L_2 C + L_2 = 0$$
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}}$$

(2) 回路のインピーダンスが極めて大きくなる並列共振角周波数ω_2の式を示せ。

インピーダンス$\dot{Z}$の分母が 0（ゼロ）になる角周波数の条件を求めればよい。

$$1-\omega_2^2 L_2 C = 0$$
$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}$$