講義中の注意

〇講義中は、参加者のマイク・カメラの機能はミュート状態になります。

〇進行はスタッフ及び講師が行いますので、指示に従ってください。

〇質疑応答の時間は、参加者のマイクをオンにして質問を受け付けることもあります。希望される方は「チャット欄」で申し出てください。

電験二種二次対策 オンライン講座

第4回
ボード線図、ナイキスト線図

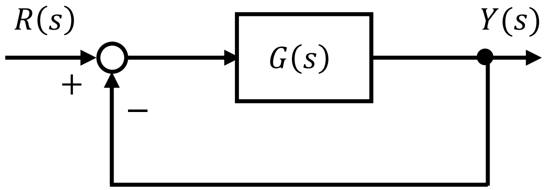
2021.10.09 Sat

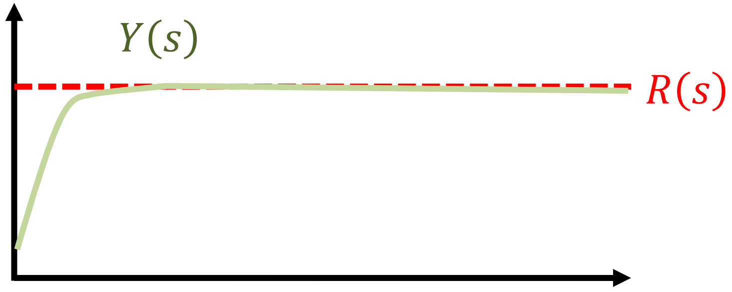
制御対象の安定判別法

制御理論は制御対象がどのくらい安定かを知るために用いられる。

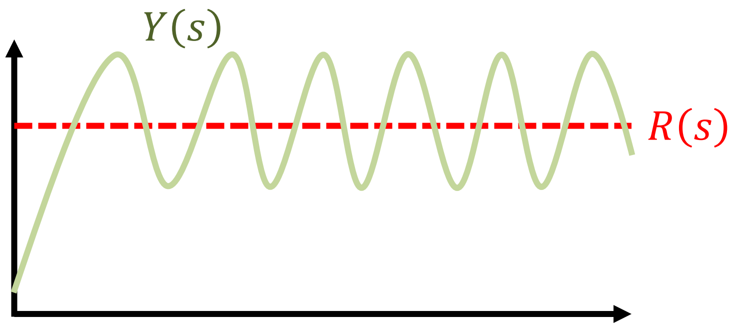
		分かりやすさ	情報量	計算の手間
○時間領域 ・過渡応答	前回の講義	易	少	難
○周波数領域 ・ボード線図	今回の講義	易	多	難
・ナイキスト線図	今回の講義	↓	多	↓
・ラウス・フルビッツの安定判別法		難	少	易

フィードバック制御と安定性





安定な制御

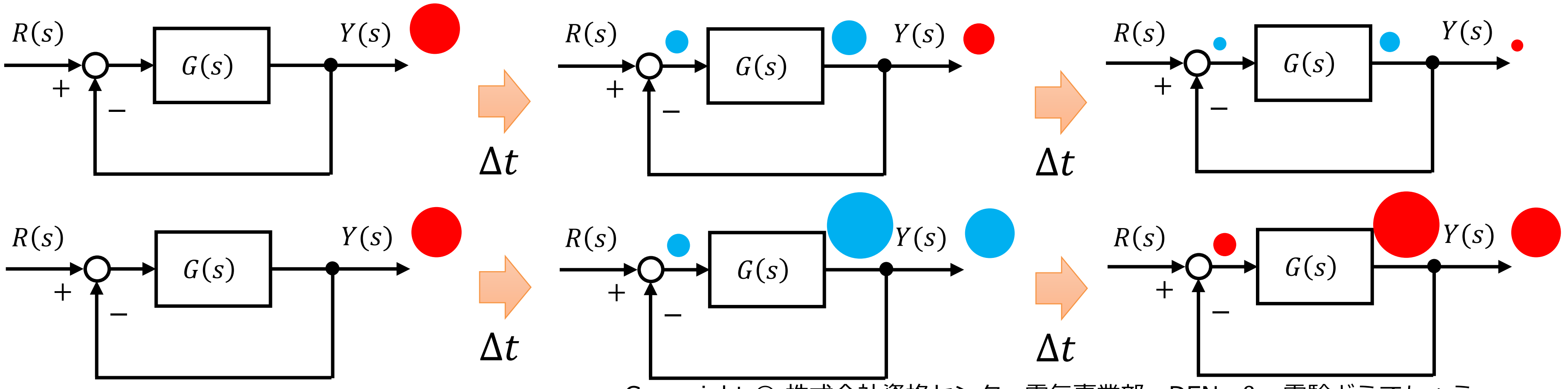


不安定な制御
→出力信号が発振する

なぜ発振するのか？

出力信号が目標値より大きいとき$(Y(s) > R(s))$

誤差（マイナス）　誤差（プラス）

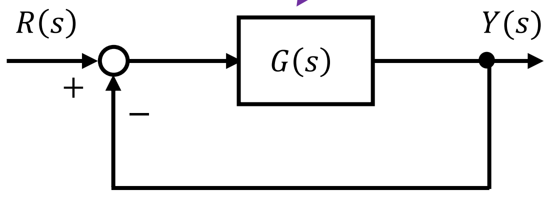


誤差が適当な大きさに増幅されると、時間経過とともに出力信号は目標値に近づく

誤差が過剰に増幅されると、時間経過とともに出力信号はずれは正負が切り替わり目標値付近で発振し続ける

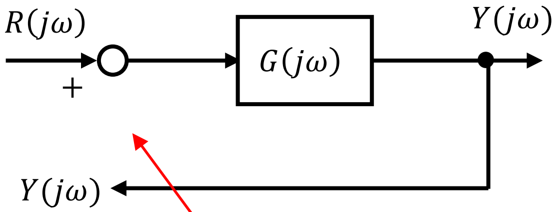
開ループ伝達関数

伝達関数の応答性の
鈍さが発振の原因



開ループ伝達関数を考える

入力信号に正弦波を加え、
角周波数を変化させる

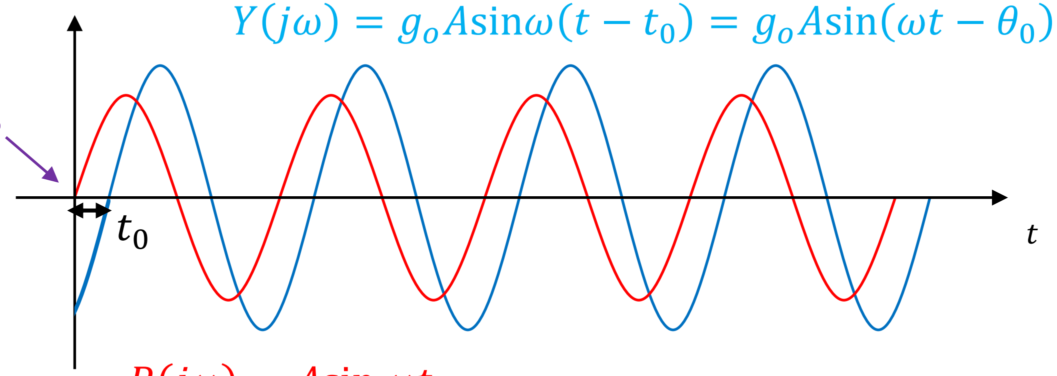


制御系のループを切り
その特性を考える

角周波数ωが小さいとき

$Y(j\omega) = g_o A\sin\omega(t - t_0) = g_o A\sin(\omega t - \theta_0)$

時間ずれt_0は
伝達関数による



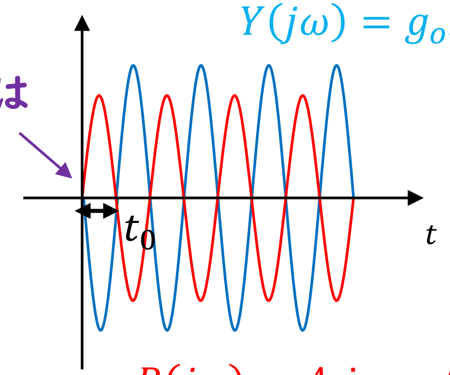
$R(j\omega) = A\sin\,\omega t$

角周波数ωを大きくすると

$Y(j\omega) = g_o A\sin\omega_1(t - t_0) = g_o A\sin(\omega_1 t - \underline{\theta_1})$

位相差$\theta_1 = 180°$

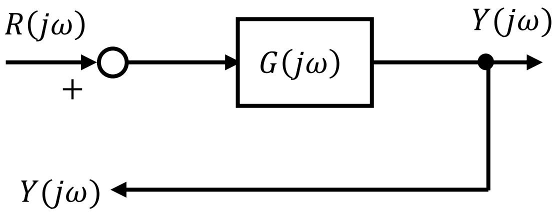
時間ずれt_0は
変化しない



$R(j\omega) = A\sin\,\omega_1 t$

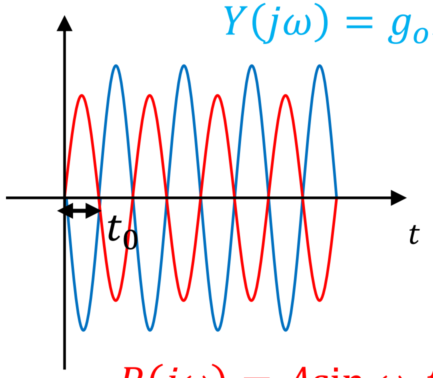
ある角周波数ω_1で
入力信号$R(s)$と出力信号$Y(s)$の
位相差θ_1が$\theta_1 = 180°$となる

開ループ伝達関数



$Y(j\omega) = g_o A\sin\omega_1(t - t_0) = g_o A\sin(\omega_1 t - \underline{\theta_1})$

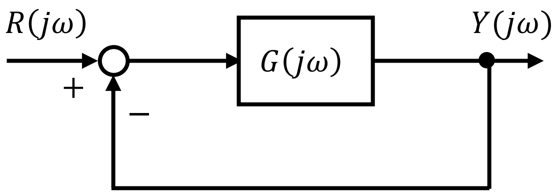
位相差$\theta_1 = 180°$

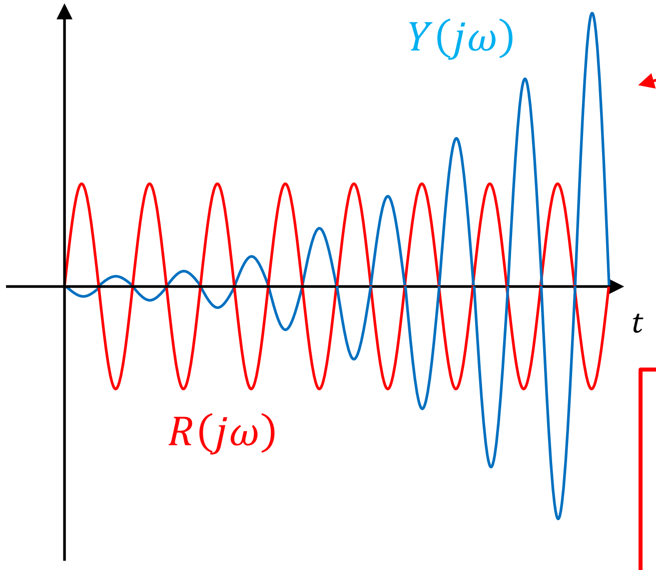


$R(j\omega) = A\sin\omega_1 t$

ある角周波数ω_1で
入力信号$R(s)$と出力信号$Y(s)$の
位相差θ_1が$\theta_1 = 180°$となる

角周波数ω_1で
フィードバックをかけると





$Y(j\omega)$の振幅は時間とともに
大きくなり、いずれ発散する

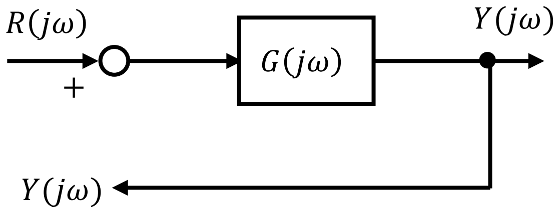
超重要！！！

開ループ伝達関数を考え、
入力信号と出力信号の位相差が
180°のときに、出力信号が入力信号より大きい
（ゲインが1より大きい）とき、出力は不安定となる

ボード線図による安定判別法

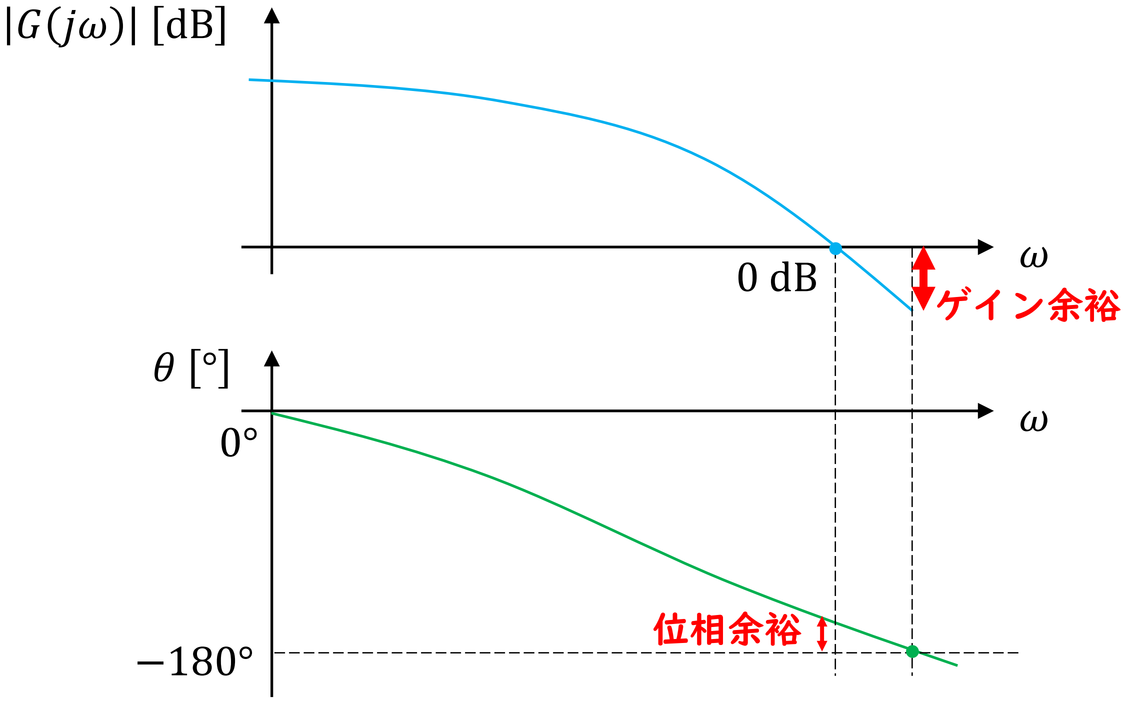
開ループ伝達関数を考え、
入力信号と出力信号の位相差が
180°のときに、出力信号が入力信号より大きい
(ゲインが1より大きい)とき、出力は不安定となる

<安定条件>
・位相差が180°のとき、ゲインが0 dB以下
又は
・ゲインが0 dBのとき位相差が180°より小さい



$G(j\omega)=|G(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$と表せる

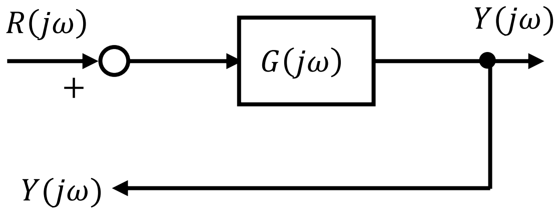
$|G(j\omega)|$と$\theta(\omega)$をそれぞれグラフで表す
→ボード線図という



ナイキスト線図による安定判別法

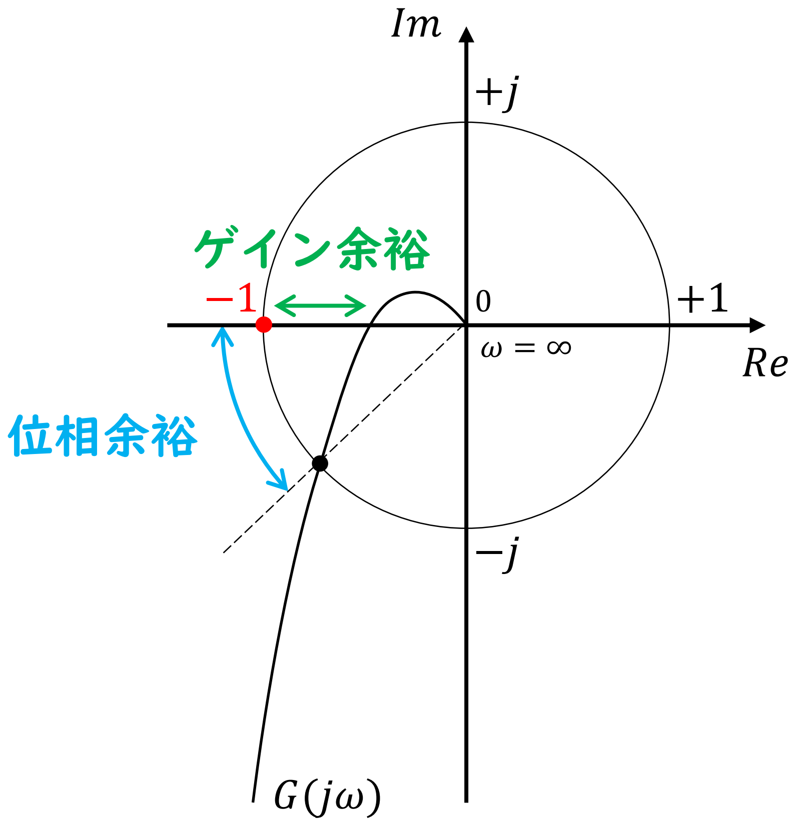
開ループ伝達関数を考え、
入力信号と出力信号の位相差が
180°のときに、出力信号が入力信号より大きい
(ゲインが1より大きい)とき、出力は不安定となる

＜安定条件＞
伝達関数の軌跡が実軸(負側)と交わるとき、
-1よりも小さい領域を通れば安定



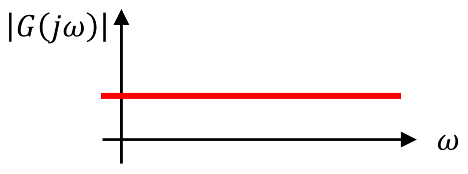
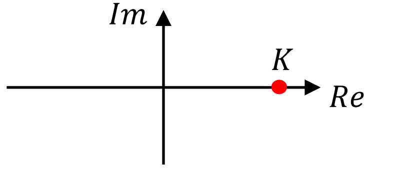
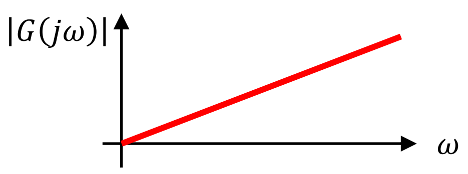
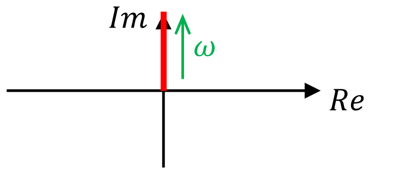
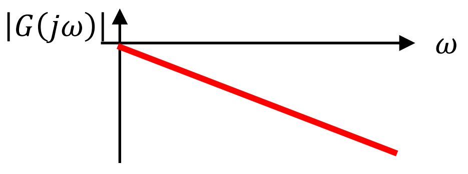
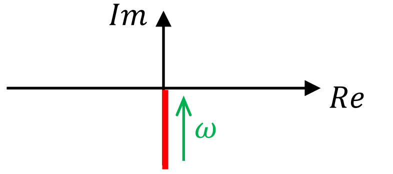
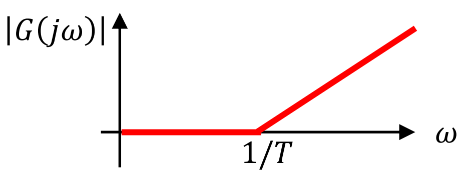
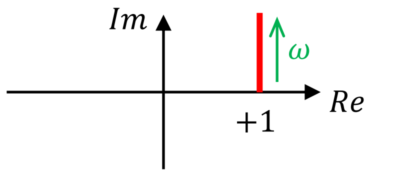
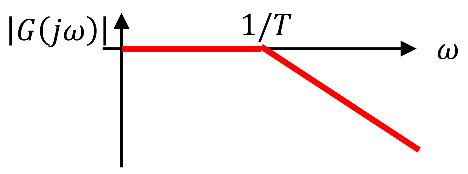
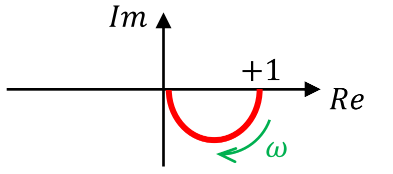
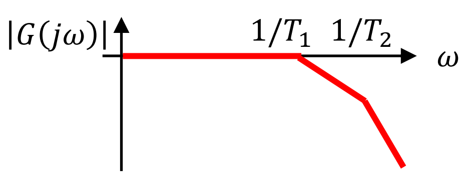
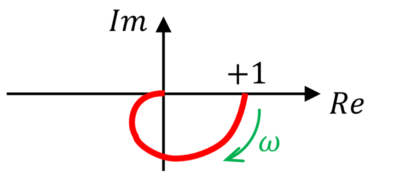
$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$と表せる

$G(j\omega)$を角周波数に関する軌跡を
複素平面上に描く
→ナイキスト線図という



ボード線図とナイキスト線図 まとめ

e-DEN × 電験どうでしょう

<table>
<tr><th>制御要素</th><th>伝達関数</th><th>絶対値（対数）</th><th>位相</th><th>ボード線図</th><th>ナイキスト線図</th></tr>
<tr><td>比例要素</td><td>K</td><td>$20\log_{10}K$</td><td>0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>微分要素</td><td>$j\omega$</td><td>$20\log_{10}\omega$</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>積分要素</td><td>$\frac{1}{j\omega}$</td><td>$-20\log_{10}\omega$</td><td>$-\frac{\pi}{2}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Ｉ次進み要素</td><td>$1+j\omega T$</td><td>$20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2T^2}$</td><td>$\theta=\mathrm{Tan}^{-1}\omega T$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Ｉ次遅れ要素</td><td>$\frac{1}{1+j\omega T}$</td><td>$-20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2T^2}$</td><td>$\theta=-\mathrm{Tan}^{-1}\omega T$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2次遅れ要素</td><td>$\frac{1}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}$</td><td>$-20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2{T_1}^2}$
$-20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2{T_2}^2}$</td><td>$\theta_1=-\mathrm{Tan}^{-1}\omega T_1$
$\theta_2=-\mathrm{Tan}^{-1}\omega T_2$
$\theta_1+\theta_2$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

H１１　問4（機械・制御）

図１に示すようなフィードバック制御系があり，その開ループ周波数伝達関数$G(j\omega)$の軌跡は図２のようになる．

この制御系について，次の問に答えよ．
（1）この制御系で位相余裕が45°となるようにゲインを調整した．このときのゲイン特性が0 [dB] となる角周波数ω_c [rad/s] およびゲインKの値を求めよ．

（2）その場合の閉ループ周波数伝達関数を求めよ．また，その固有角周波数ω_n [rad/s]および減衰係数ζの値を求めよ．

（3）閉ループ周波数伝達関数の周波数特性の振幅が最大となる角周波数ω_P [rad/s]は$\sqrt{1-2\zeta^2}\,\omega_n$で与えられる． ω_P [rad/s]および最大振幅M_Pの値を求めよ．

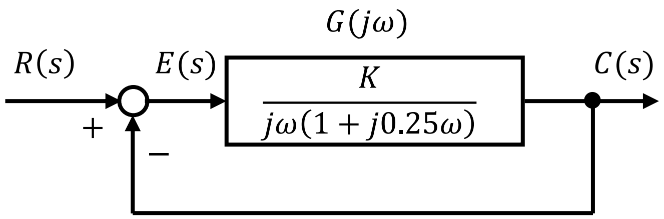


図１

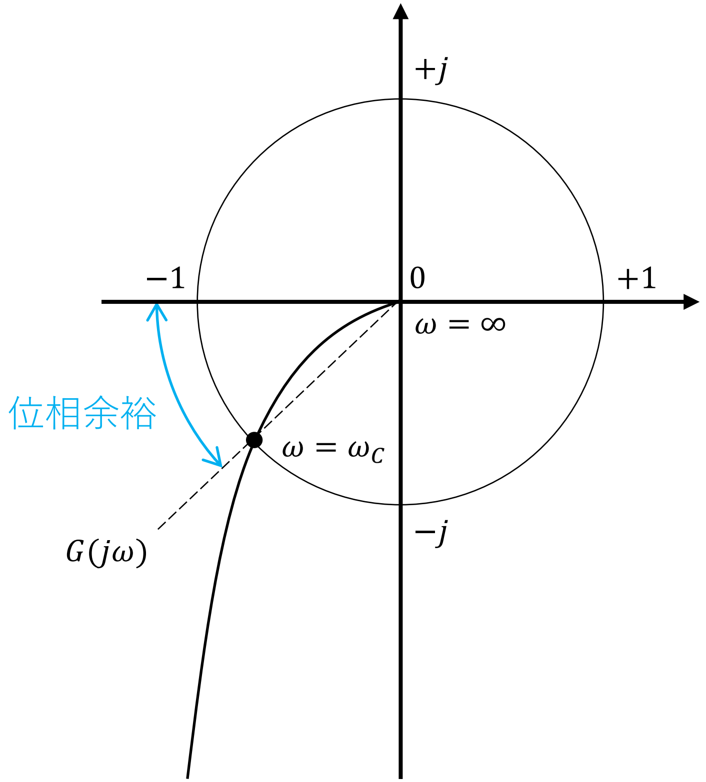


図２

H11　問4（解説）

図１に示すようなフィードバック制御系があり，その開ループ周波数伝達関数$G(j\omega)$の軌跡は図２のようになる．

この制御系について，次の問に答えよ．
（1）この制御系で位相余裕が45°となるようにゲインを調整した．このときのゲイン特性が0 [dB] となる角周波数ω_c [rad/s] およびゲインKの値を求めよ．

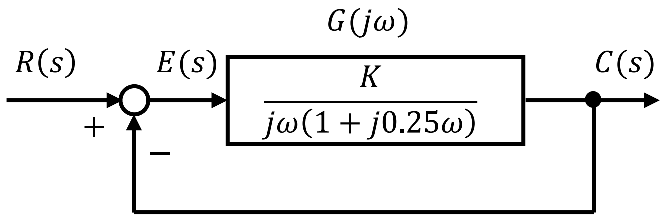


図１

位相余裕 45°

→複素平面上の点$z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$**を通る**

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j0.25\omega)} = \frac{K}{\omega}\cdot\frac{1}{-0.25\omega + j}$$

$$\tan 45° = 1 = \frac{0.25\omega_c}{1} \rightarrow 0.25\omega_c = 1 \rightarrow \omega_c = 4\ \mathrm{rad/s}$$

$$|G(j\omega)| = 0\ \mathrm{dB} = 1 = \left|\frac{K}{\omega_c}\cdot\frac{1}{-0.25\omega_c + j}\right| = \frac{K}{4}\left|\frac{1}{-0.25\times 4 + j}\right| = \frac{K}{4}\left|\frac{1}{-1+j}\right|$$

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{4}\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{K}{4\sqrt{2}} \rightarrow \frac{K}{4\sqrt{2}} = 1 \rightarrow K = 4\sqrt{2}$$

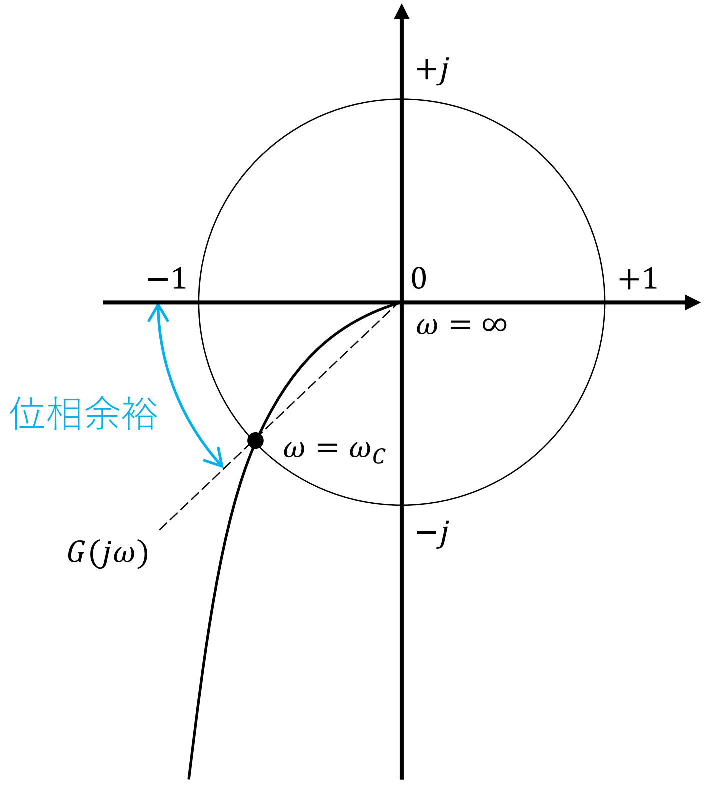


図２

H11　問4（解説）

（2）その場合の閉ループ周波数伝達関数を求めよ．また，その固有角周波数ω_n [rad/s]および減衰係数ζの値を求めよ．

$$\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}=\frac{\dfrac{K}{j\omega(1+j0.25\omega)}}{1+\dfrac{K}{j\omega(1+j0.25\omega)}}=\frac{K}{j\omega(1+j0.25\omega)+K}=\frac{K}{-0.25\omega^2+j\omega+K}$$

$$=\frac{4K}{-\omega^2+j4\omega+4K}=\frac{16\sqrt{2}}{-\omega^2+j4\omega+16\sqrt{2}}$$

$$\frac{\omega_n^2}{s+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2}{-\omega^2+j2\zeta\omega_n\omega+\omega_n^2}$$ **（$s=j\omega$を代入）**

$$\omega_n^2=16\sqrt{2}\rightarrow\omega_n^2=22.627\ \rightarrow\omega_n=\sqrt{22.627}=4.757\ \mathrm{rad/s}$$

$$2\zeta\omega_n=4\ \rightarrow\zeta=\frac{2}{\omega_n}=\frac{2}{4.757}=0.420$$

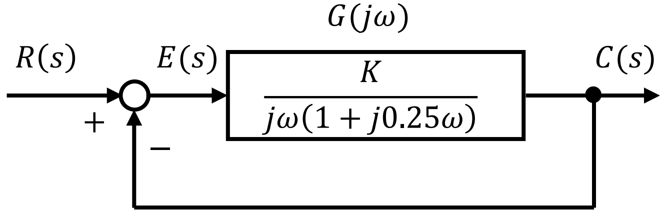


図 1

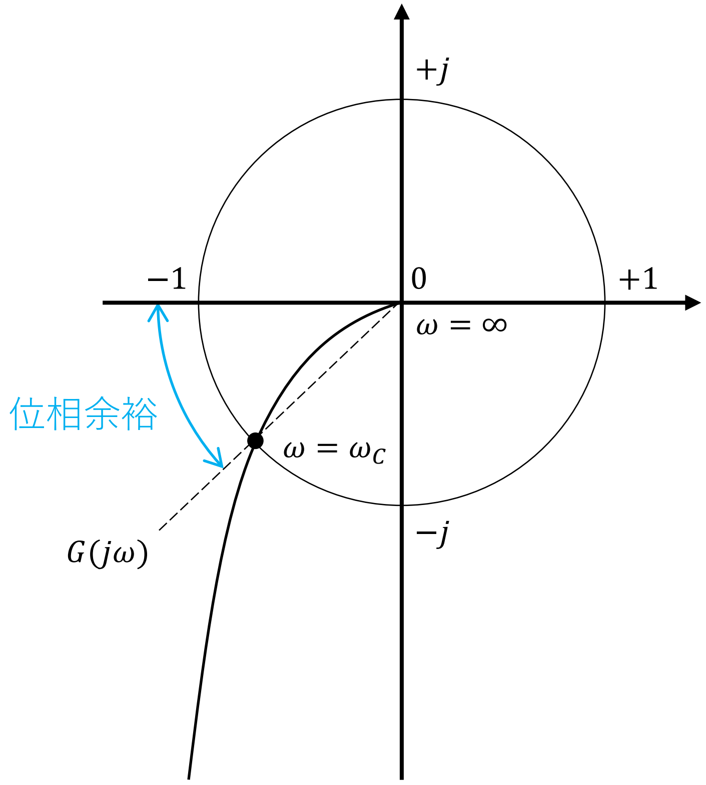


図 2

H11　問4（解説）

（3）閉ループ周波数伝達関数の周波数特性の振幅が最大となる角周波数 ω_P [rad/s]は$\sqrt{1-2\zeta^2}\omega_n$で与えられる．$\omega_P$ [rad/s]および最大振幅M_Pの値を求めよ．

$$\omega_n = 4.757\ \mathrm{rad/s} \quad \zeta = 0.420$$

$$\omega_P = \sqrt{1-2\zeta^2}\omega_n = \sqrt{1-2\times 0.42^2}\times 4.757 = 3.827\ \mathrm{rad/s}$$

$$M_P = \left|\frac{16\sqrt{2}}{-\omega_P^2 + j4\omega_P + 16\sqrt{2}}\right| = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{\left(16\sqrt{2}-\omega_P^2\right)^2 + 16\omega_P^2}}$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{\left(16\sqrt{2}-3.827^2\right)^2 + 16\times 3.827^2}} = 1.311$$

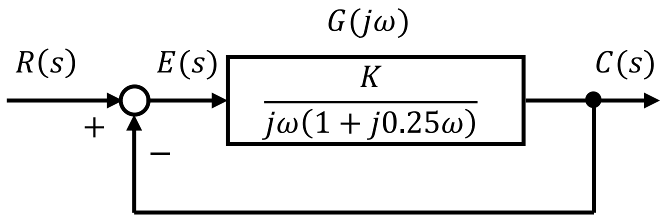


図 1

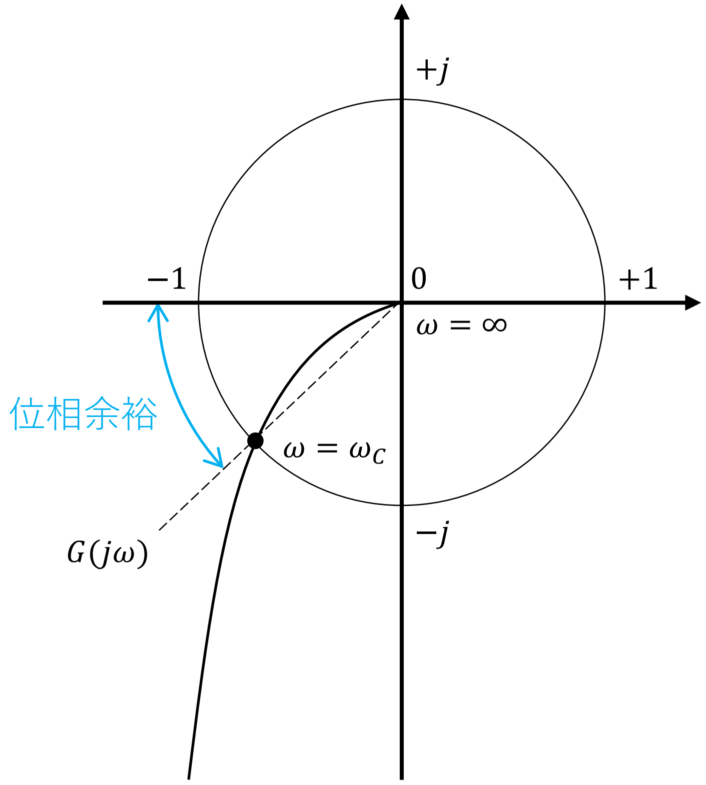


図 2

H15 問4（機械・制御）

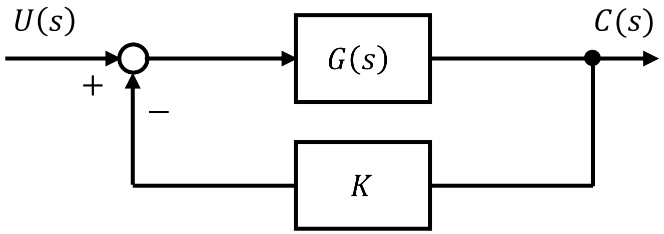
フィードバック制御系について，次の問に答えよ．

（1）要素の単位インパルス応答$g(t)$が次式で表されるとき，この要素の伝達関数$G(s)$を求めよ．ただし，tは時間[s]とする．

$$g(t) = 0 \qquad (t < 0)$$

$$g(t) = \frac{1}{2} - \mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} \qquad (t \geq 0)$$

（2）この要素$G(s)$に，図のようなフィードバックをかけたときの閉ループ伝達関数$W(s) = C(s)/U(s)$を求めよ．ここで，Kは定数であり，$K > 0$である．



（3）上記（2）の閉ループ系の安定限界におけるKの値およびそのときの持続振動の角周波数ω [rad/s]を求めよ．

H15 問4（解説）

（1）要素の単位インパルス応答$g(t)$が次式で表されるとき，この要素の伝達関数$G(s)$を求めよ．ただし，tは時間[s]とする．

$$g(t) = 0 \qquad (t < 0)$$

$$g(t) = \frac{1}{2} - \mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} \qquad (t \geq 0)$$

$$g(t) = \frac{1}{2} - \mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}$$

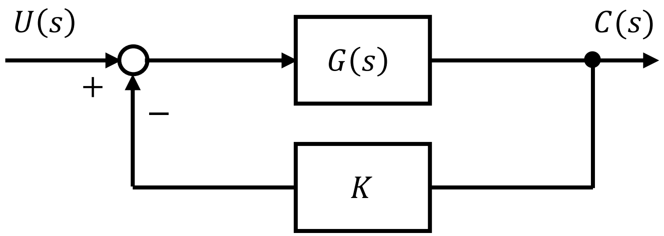
$$\rightarrow G(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(s+1)(s+2) - 2s(s+2) + s(s+1)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(s+1)(s+2) - 2s(s+2) + s(s+1)}{s(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{s^2 + 3s + 2 - 2s^2 - 4s + s^2 + s}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\therefore G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

H15 問4（解説）

（2）この要素$G(s)$に，図のようなフィードバックをかけたときの閉ループ伝達関数$W(s) = C(s)/U(s)$を求めよ．ここで，Kは定数であり，$K > 0$である．



$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

$$W(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1+KG(s)} = \frac{\frac{1}{s(s+1)(s+2)}}{1+\frac{1}{s(s+1)(s+2)}K} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)+K}$$

H15 問4（解説）

（3）上記（2）の閉ループ系の安定限界におけるKの値およびそのときの持続振動の角周波数ω [rad/s]を求めよ

$$G(s)K = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\rightarrow G(j\omega)K = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} = \frac{K}{j\omega(-\omega^2+j3\omega+2)} = \frac{K}{-3\omega^2+j\omega(2-\omega^2)}$$

$$G(j\omega)K = \frac{K}{-3\omega^2+j\omega(\underbrace{2-\omega^2}_{0})}$$

$$\omega = 0 \rightarrow G(j\omega)K = \infty$$
$$\omega = \infty \rightarrow G(j\omega)K = 0$$

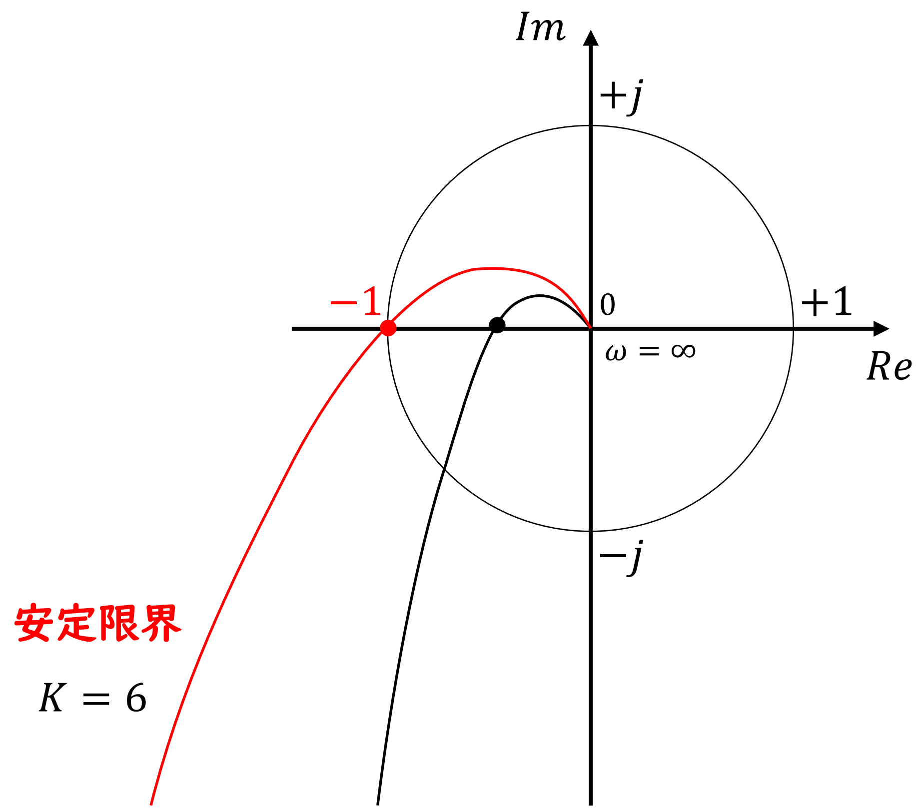
虚部が0になるとき

$$G(j\omega_c)K = \frac{K}{-3\omega_c^2+j\omega_c(2-\omega_c^2)}$$

$$\omega_c = \sqrt{2} \rightarrow G(j\omega_c)K = \frac{K}{-3\times 2} = -\frac{K}{6}$$

安定限界では$|G(j\omega_c)K| = -1$ **なので**

$$G(j\omega_c)K = -\frac{K}{6} = -1 \rightarrow K = 6$$



H22 問4（機械・制御）

問４　図１のようなフィードバック制御系について，次の問に答えよ。ただし，$R(s)$は目標値，$Y(s)$は出力，$E(s)$は偏差であり，時間信号$r(t)$，$y(t)$，$e(t)$をそれぞれラプラス変換したものである。

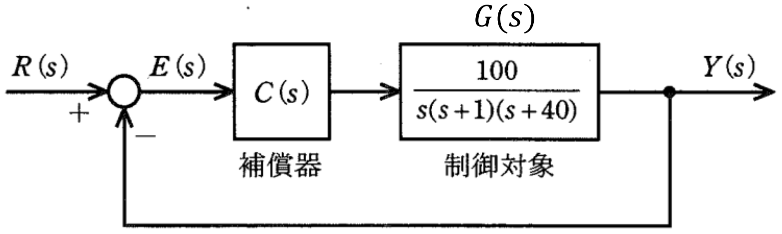


図１

(1) 補償器を$C(s) = K_1$に選ぶとき，図１のフィードバック系の安定限界を与えるK_1の値とそのときの持続振動の角周波数ω_1を求めよ。ただし，答は平方根を含む形でよい。

(2) 図１において，$C(s) = K_1$に選び，$K_1 = 1$とおく。目標値$r(t)$が振幅１，角周波数１〔rad/s〕の正弦波信号のとき，十分に時間が経過したときの偏差$e(t)$の振幅を求めよ。

(3) 補償器を$C(s) = K_2\dfrac{s+1}{s+10}$に選ぶとき，この補償器の名称を答えよ。

(4) 上記(3)において，$K_2 = 10$のとき，補償器のゲイン（利得）特性の概形を折れ線近似で図示せよ。図２を答案用紙に書き写して答えよ。

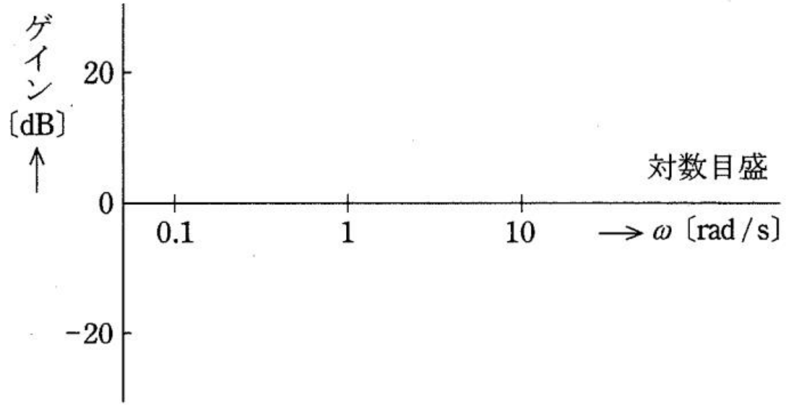


図２

(5) 一般に，上記(3)の補償器により改善できるフィードバック制御系の代表的な性能を述べよ。

H22 問4（解説）

問４　図１のようなフィードバック制御系について，次の問に答えよ。ただし，$R(s)$ は目標値，$Y(s)$ は出力，$E(s)$ は偏差であり，時間信号 $r(t)$，$y(t)$，$e(t)$ をそれぞれラプラス変換したものである。

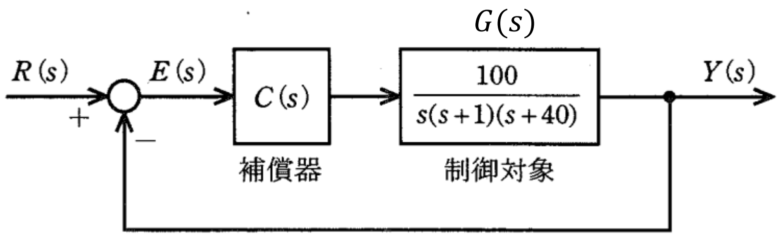


図１

(1) 補償器を $C(s) = K_1$ に選ぶとき，図１のフィードバック系の安定限界を与える K_1 の値とそのときの持続振動の角周波数 ω_1 を求めよ。ただし，答は平方根を含む形でよい。

$$C(s)G(s) = \frac{100K_1}{s(s+1)(s+40)}$$

$$\rightarrow C(j\omega)G(j\omega) = \frac{100K_1}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+40)} = \frac{100K_1}{j\omega(-\omega^2+j41\omega+40)}$$

$$C(j\omega)G(j\omega) = \frac{100K_1}{-41\omega^2+j\omega(40-\omega^2)}$$

虚部が0になるとき

$\omega_1^2 = 40$

$C(j\omega_1)G(j\omega_1) = \dfrac{100K_1}{-41\times 40} = -1$ **（安定限界の条件より）**

$$K_1 = \frac{41\times 40}{100} = 16.4$$

H22 問4（解説）

問４　図１のようなフィードバック制御系について，次の問に答えよ。ただし，$R(s)$は目標値，$Y(s)$は出力，$E(s)$は偏差であり，時間信号$r(t)$，$y(t)$，$e(t)$をそれぞれラプラス変換したものである。

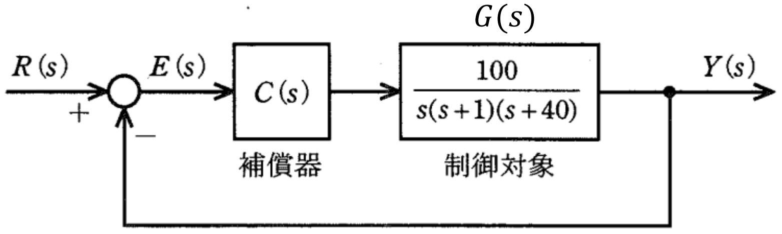


図１

(1) 補償器を$C(s)=K_1$に選ぶとき，図１のフィードバック系の安定限界を与えるK_1の値とそのときの持続振動の角周波数ω_1を求めよ。ただし，答は平方根を含む形でよい。

(2) 図１において，$C(s)=K_1$に選び，$K_1=1$とおく。目標値$r(t)$が振幅１，角周波数１〔rad/s〕の正弦波信号のとき，十分に時間が経過したときの偏差

(2)

$$C(j\omega)G(j\omega)=\frac{100K_1}{-41\omega^2+j\omega(40-\omega^2)}$$

$$E(j\omega)=\frac{1}{1+C(j\omega)G(j\omega)}R(j\omega)=\frac{1}{1+\frac{100K_1}{-41\omega^2+j\omega(40-\omega^2)}}R(j\omega)$$

$$E(j\omega)=\frac{-41\omega^2+j\omega(40-\omega^2)}{-41\omega^2+j\omega(40-\omega^2)+100K_1}R(j\omega)$$

$\omega=1, K_1=1, |R(j)|=1$ **とすると**

$$|E(j)|=\left|\frac{-41+j(40-1)}{-41+j(40-1)+100}\right||R(j)|=\left|\frac{41-j39}{59+j39}\right|=\frac{\sqrt{41^2+39^2}}{\sqrt{59^2+39^2}}=0.800$$

偏差$e(t)$の振幅0.8となる

H22 問4（解説）

(3) 補償器を $C(s)=K_2\dfrac{s+1}{s+10}$ に選ぶとき，この補償器の名称を答えよ。

(4) 上記(3)において，$K_2=10$ のとき，補償器のゲイン（利得）特性の概形を折れ線近似で図示せよ。図2を答案用紙に書き写して答えよ。

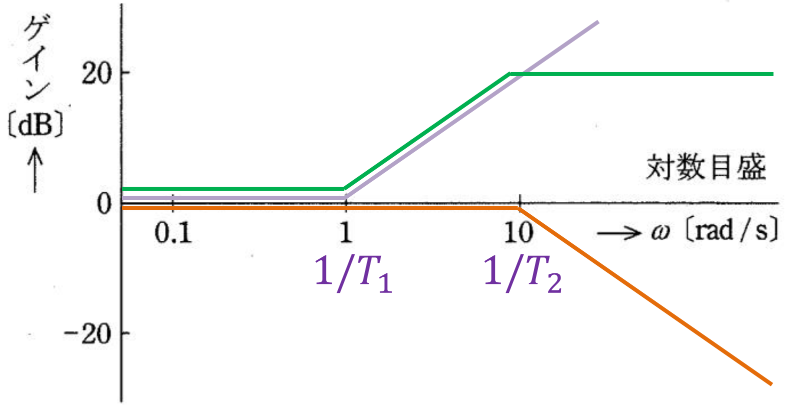


図2

(5) 一般に，上記(3)の補償器により改善できるフィードバック制御系の代表的な性能を述べよ。

(3)

$$C(s)=A\frac{T_1s+1}{T_2s+1}=\frac{K_2}{10}\frac{s+1}{\frac{1}{10}s+1}\rightarrow T_1=1\,,T_2=0.1$$

$T_1>T_2$ **より位相進み補償器**

(4)

$$\frac{T_1s+1}{T_2s+1}\,,\qquad T_1=1\rightarrow 1/T_1=1\,,T_2=0.1\rightarrow 1/T_2=10$$

$$\frac{1}{T_2s+1}\rightarrow -20\log|T_2s+1|\ [\mathrm{dB}]$$

$$T_1s+1\rightarrow +20\log|T_1s+1|\ [\mathrm{dB}]$$

$$\frac{T_1s+1}{T_2s+1}\rightarrow +20\log|T_1s+1|-20\log|T_2s+1|[\mathrm{dB}]$$

(5) **高周波域のゲインが改善され、フィードバック制御系の速応性が良くなる**

e-DEN【イーデン】 × 電験どうでしょう

ご聴講ありがとうございました!!